Perturbations visqueuses de solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires

Franck Sueur

To cite this version:

Franck Sueur. Perturbations visqueuses de solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires. 2004. hal-00002136

HAL Id: hal-00002136

https://hal.science/hal-00002136

Preprint submitted on 20 Jun 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Perturbations visqueuses de solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires.

22 Mai 2004

Franck Sueur

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités.

Centre de Mathématiques et d'Informatique.

Université de Provence. 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille. France

Franck.Sueur@cmi.univ-mrs.fr

Résumé

On s'intéresse à des systèmes symétriques hyperboliques multidimensionnels en présence d'une semilinéarité. Il est bien connu que ces systèmes admettent des solutions discontinues, régulières de part et d'autre d'une hypersurface lisse caractéristique de multiplicité constante. On montre qu'une telle solution u^0 est limite quand $\varepsilon \to 0$ de solutions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ du système perturbé par une viscosité de taille ε. La preuve utilise un problème mixte parabolique et des développements de couches limites. On s'intéresse aussi à des singularités plus faibles comme des sauts de dérivées.

Abstract

We are interested in some multidimensional semilinear symmetric hyperbolic systems. It is well known that these systems have some discontinuous solutions which are regular outside of a smooth hypersurface characteristic of constant multiplicity. We show that such a solution u^0 is the limit, when $\varepsilon \to 0$, of solutions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ of the system perturbated by a viscosity $\varepsilon \mathcal{E}$. The key tools of the proof are a parabolic boundary problem and boundary layers expansions. We also consider weaker singularities as derivatives jumps.

Table des matières

1 Introduction

On considère un opérateur

$$\mathcal{H} := A_0(t,x)\partial_t + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} A_j(t,x)\partial_j + B(t,x) \tag{1}$$

symétrique hyperbolique. Les matrices A_j et B sont de taille $N \times N$, C^∞ de leurs arguments, constantes hors d'un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$. On considère aussi des fonctions $f(t,x)$ et $F(t,x,u)$ qui joueront respectivement le rôle de terme source et de nonlinéarité. Les fonctions f et F sont à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. La fonction F dépend de façon C^∞ de ses arguments . On suppose que pour tout (t,x) dans $\mathbb{R}^{1+n}$, on a $F(t,x,0) = 0$. On note $\Omega_T := (-1,T)\times\mathbb{R}^n$. On introduit le problème

$$P^0(T): \quad \mathcal{H}u^0 = F(t,x,u^0) + f(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T$$

On cherche des solutions particulières singulières sur une hypersurface Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et régulières en dehors de Γ. Les singularités envisagées sont des sauts de u ou de ses dérivées, l'hypersurface Γ étant supposée lisse et caractéristique. Comme on s'interesse à des résultats locaux, quitte à effectuer un redressement, on peut supposer que $\Gamma = \{x_n = 0\}$. On note $x = (y, x_n)$, et, pour $T > 0$,

$$\Gamma_T := \{(t,y,0) \in \mathbb{R}^{1+n} / -1 < t < T\}.$$

On utilisera les espaces de Sobolev $(H^s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ construits sur L^2. Une fonction sera dite H^∞ sur un domaine si toutes ses dérivées sont de carrés intégrables sur ce domaine. On note $p - H^\infty(\Omega_T)$ l'espace des fonctions H^∞ de part et d'autre de Γ_T et on suppose que f est dans $p - H^\infty(\Omega_T)$. Le fait que Γ soit une surface caractéristique se traduit par $\ker A_n \neq \{0\}$. On supposera dans ce travail :

Hypothèse 1.1 *Le champ d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ $\ker A_n$ *est de dimension constante sur* Γ.

C'est en particulier le cas lorsque l'opérateur est strictement hyperbolique. On notera d_0 la dimension de $\ker A_n$ sur Γ.

L'existence et la propagation d'une solution u^0 dans $p - H^\infty(\Omega_{T_0})$ au problème $P^0(T_0)$ où $T_0 > 0$, pour des opérateurs strictements hyperboliques, sont connues depuis les travaux de G.Métivier dans [7], [8]. On donne en annexe une démonstration adaptée au cas présent, utilisant un cas particulier d'un théorème de [1] redémontré et assorti d'un principe d'explosion dans [11].

On montre que l'on peut obtenir ces solutions comme limites de solutions du système perturbé par une petite viscosité. Par souci de simplicité, on choisira le Laplacien mais les résultats sont les mêmes pour toute viscosité linéaire uniformément elliptique. On considère le problème

$$P^\varepsilon(T): \quad \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T$$

où

$$\mathcal{L}^\varepsilon u := \mathcal{H}u - (F(t,x,u) + f(t,x) + \varepsilon \Delta u)$$

et ε est un coefficient strictement positif destiné à tendre vers 0. On donne un premier énoncé simplifié. Des résultats plus précis sont donnés à la section suivante.

Théorème 1.1 *Il existe un temps T_1 dans $]0,T_0]$, un réel ε_0 dans $]0,1]$ et une famille $(u^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}$ de solutions respectives des problèmes $(P^\varepsilon(T_1))_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}$ telles que u^0 est limite de u^ε dans $L^2(\Omega_{T_1})$, quand ε tend vers 0, et*

$$||u^0 - u^\varepsilon||_{L^2(\Omega_{T_1})} = O(\varepsilon^{\frac{1}{4}}).$$

La première assertion du théorème nous renseigne sur l'effet de la semilinéarité. Notons que si l'existence, pour un $\varepsilon \in]0,1]$ fixé, d'une solution régulière u^ε au problème $P^\varepsilon(T_\varepsilon)$, où $T_\varepsilon > 0$, sont connues, le théorème 1.1 affirme, lui, l'existence des u^ε, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, sur un intervalle de temps non trivial commun. Bien sûr, dans le cas linéaire, on peut prendre $T_1 = T_0$. La convergence des $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ vers u^0 est, à notre connaissance, un résultat nouveau *même dans le cas linéaire*. La méthode employée ici donne également des estimations dans les espaces de Sobolev H^s ainsi que dans L^∞. Ces dernières jouent un rôle crucial dans le cas semilinéaire.

Il se peut que la singularité soit plus faible qu'un saut de la fonction u^0 elle-même et ne concerne que le saut d'une dérivée (et ce ne peut être alors qu'une dérivée normale). On peut alors prendre $T_1 = T_0$ et la qualité de l'approximation est alors d'autant meilleure que le saut concerne une dérivée d'ordre élevée.

Dans cet article, on montre en fait que l'on peut décrire u^ε à l'aide d'un développement BKW de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1}\, r_\varepsilon(t,x)$$

pour tout entier naturel k, où le profil $\mathcal{U}^j$ se décompose en trois termes :

$$\mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) := \mathcal{U}_a^j(t,x) + \mathcal{U}_b^j(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \mathcal{U}_c^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}).$$

Les fonctions $\mathcal{U}_b^j(t,x,\theta)$ et $\mathcal{U}_c^j(t,x,z)$ sont des termes rendant compte de la présence respectivement de couches limites caractéristiques (CLC) et non caractéristiques (CLNC) de part et d'autre de Γ. Ces fonctions sont singulières à travers Γ et tendent vers 0 lorsque θ ou z tendent vers $\pm\infty$. Leur rôle est d'assurer le raccord de u^ε et de $\partial_n u^\varepsilon$ sur Γ. On a $u^0 := \mathcal{U}_a^0$. Le comportement de $\mathcal{U}_b^0$ est non linéaire. La CLNC n'apparaît que pour $j = 2$ c'est à dire avec une amplitude ε. Cela provient de ce que la tâche des CLNC ne concerne que le raccordement de dérivées d'ordre plus grand que 1 de u^0. Si les r premières dérivées de f^0 sont continues au passage de Γ, les profils $(\mathcal{U}_b^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$ et $(\mathcal{U}_c^j)_{0\leqslant j\leqslant r+2}$ sont nuls. Le terme r_ε joue le rôle de reste.

L'analyse consiste à se ramener à un problème dans le demi-espace puis à suivre la stratégie de [11]. Il est bien connu que des conditions de transmission (conditions de Rankine-Hugoniot [10]) sont nécessaires sur l'hypersurface. Ces conditions sont mises sous la forme de conditions aux limites. Le problème hyperbolique est reformulé en un problème mixte avec des conditions aux limites maximales dissipatives, en fait même conservatives. Pour les perturbations paraboliques, on se ramène à des problèmes mixtes paraboliques avec des conditions aux limites de type mixte Dirichlet-Neumann.
Rappelons les deux grandes étapes de la méthode de [11]. La première consiste à chercher une famille de solutions approchées sous la forme d'un développement BKW. On résoud pour cela une succession de problèmes pour les profils du développement. Signalons ici que si l'on utilise des profils similaires à ceux de [11] et que les équations de profils sont de même type, les conditions aux limites diffèrent. L'ordre de résolution des problèmes pour les profils change en conséquence.
La seconde prouve l'existence d'une famille de solutions exactes des problèmes mixtes paraboliques ayant pour partie principale la famille de solutions approchées de la première étape. La différence est une famille de restes que l'on obtient comme solutions de problèmes mixtes paraboliques semilinéaires et pour lesquels on établit des estimations uniformes en ε.
On utilise, au cours des deux étapes, des lemmes boréliens pour prouver l'existence de données initiales compatibles.
Il est intéressant de noter que [11] montre que la limite de problèmes mixtes symétriques paraboliques avec conditions de Dirichlet est un problème symétrique hyperbolique strictement dissipatif. On voit donc que l'on atteint avec des conditions aux limites de type mixte Dirichlet-Neumann un problème que l'on atteint pas avec des conditions de Dirichlet. Ce fait, de portée générale, est détaillée dans [12]. Il est intimement lié à l'absence de CLNC de grande amplitude.

Insistons sur le fait que la singularité est ici portée par une hypersurface caractéristique, contrairement au cas des ondes de chocs. Dans ce dernier cas, la variable rapide adéquate est $\frac{x_n}{\varepsilon}$, ce qui correspond à des CLNC de part et d'autre de l'hypersurface.

On a choisi de travailler dans un cadre H^∞. Il est tout à fait possible de travailler avec une régularité très grande mais finie, au prix d'une analyse plus laborieuse.

Il serait intéressant d'essayer d'appliquer la démarche précédente à d'autres singularités le long de fronts caractéristiques dans le cas quasilinéaire comme les ondes soniques mises en évidence dans [6] ou dans des cas favorables de discontinuités de contact.

2 Les principaux résultats

On note $\partial_0 := \partial_t$ et pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $\quad Z_i := \partial_i$ et $Z_n := h(x_n)\partial_n$ où h est une fonction C^∞, à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que $h(x_n) = x_n$ quand $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. $\mathfrak{Z} := (Z_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de l'algèbre des champs de vecteurs C^∞ tangents à Γ. Lorqu'il n'y pas de risque de confusion, on utilise simplement la lettre Z pour désigner une dérivation quelconque de $\mathfrak{Z}$, et, pour j entier naturel, Z^j un produit de j dérivations de $\mathfrak{Z}$. On introduit les normes

$$||u||_{H^{m,s}(\Omega_T)} := \sum_{i+j \leqslant m; i \leqslant s} ||Z^j \partial_n^i u||_{L^2(\Omega_T)}$$

qui différentient régularités normale et conormale.
Soit P_0 le projecteur orthogonal sur $\ker \mathring{A}_n$, où $\mathring{A}_n$ est la trace de A_n sur Γ, et

$$P_0^\perp := Id - P_0.$$

Désignons par $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ le demi-espace, pour $T > 0$, les parties gauche et droite de l'espace-temps :

$$\begin{aligned}
\Omega_T^+ &:= \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} / -1 < t < T, x_n > 0\}, \\
\Omega_T^- &:= \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} / -1 < t < T, x_n < 0\}.
\end{aligned}$$

Pour r entier naturel, une fonction u de $p - H^\infty(\Omega_T)$ est de classe C^r sur Ω_T si et seulement si pour $0 \leqslant j \leqslant r$, les traces $T_j^\pm$ de $\partial_n^j(u|_{\Omega_T^\pm})$ sur Γ_T vérifient $T_j^+ = T_j^-$.

Introduisons l'espace de profils

$$\mathcal{P}(\Omega_T) := \{\mathcal{U}(t,x,z,\theta) = \mathcal{U}_a(t,x) + \mathcal{U}_b(t,x,\theta) + \mathcal{U}_c(t,x,z) \quad \text{où}$$
$$\mathcal{U}_a \in p - H^\infty(\Omega_T), \quad \mathcal{U}_b \in p - H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta)) \quad \mathcal{U}_c \in p - H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_z)).\}$$

$\mathcal{S}$ désigne l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide. $\mathcal{U}_b \in p - H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta))$ signifie que la fonction $\Omega_T \to \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta)$, $(t,x) \mapsto \mathcal{U}_b(t,x,.)$ est H^∞ de part et d'autre de Γ_T. On introduit les normes

$$|u|^+_{m,T} := \sum_{0\leqslant l\leqslant m} |Z^l u|_{L^2(\Omega^+_T)}, \quad |u|^-_{m,T} := \sum_{0\leqslant l\leqslant m} |Z^l u|_{L^2(\Omega^-_T)}$$

et

$$\mathcal{G}^m(T) := \{(u^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1} \in (p - H^m(\Omega_T))^{]0,1]} / \quad \exists \varepsilon' \in]0,1] / \quad \sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon']} ||u^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T} < \infty\}$$

où

$$||u^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T} := \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{max(0,k-\frac{1}{2})}(|\partial^k_n u^\varepsilon|^+_{m-k,T} + |\partial^k_n u^\varepsilon|^-_{m-k,T}).$$

Remarquons que si $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$ alors la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par

$$a^\varepsilon(t,x) := \mathcal{U}(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

est, pour tout $m \in \mathbb{N}$, dans $\mathcal{G}^m(T)$. Insistons notamment sur le fait qu'un profil de CLNC est un $O(\sqrt{\varepsilon})$ dans L^2 alors qu'un profil de CLC est un $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$.

Le théorème suivant est le résultat central de l'article.

Théorème 2.1 1. *Il existe $T_1 \in]0,T_0]$ tel que pour tout k entier naturel, il existe ε_0 dans $]0,1]$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, il existe une solution u^ε de $P^\varepsilon(T_1)$, de la forme*

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_\varepsilon(t,x) \tag{2}$$

où pour $0 \leqslant j \leqslant k$, $\mathcal{U}^j$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_{T_1})$ et $(R_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ dans $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}^m(T_1)$. Les profils $\mathcal{U}^0_c$ et $\mathcal{U}^1_c$ sont identiquement nuls.
2. *Si u^0 est continue sur Ω_{T_0}, on peut prendre $T_1 = T_0$.*
3. *Soit r un entier naturel, si u^0 est de classe C^r sur Ω_{T_0}, on peut choisir les profils $\mathcal{U}^j$ de telle sorte que l'on ait les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{2j+1}_a &= 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant [\frac{r}{2}], \\ \mathcal{U}^j_b &= 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant r, \\ \mathcal{U}^j_c &= 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant r+2, \end{aligned}$$

où $[\frac{r}{2}]$ désigne la partie entière de $\frac{r}{2}$.

Le point 3 du théorème peut se reformuler ainsi : si u^0 est C^r, alors la famille $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ peut être décrite à l'aide de développement de la forme

$$\sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]} \varepsilon^j \mathcal{U}_a^j(t,x) + \sum_{j\geqslant r+1} \sqrt{\varepsilon}^j \, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

On peut qualifier la première somme de régulière. En effet, c'est un développement de ce type que l'on obtient lorsqu'on regarde les approximations visqueuses de solutions u^0 régulières dans tout l'espace (H^∞ sur Ω_T). Les termes singuliers (à variation rapide) n'apparaissent qu'avec, au plus, une amplitude $\sqrt{\varepsilon}^{r+1}$. A partir de cette amplitude (ie pour des puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ plus grande que $r+1$) , on peut avoir des profils $\mathcal{U}_a$ (resp $\mathcal{U}_c$) avec une amplitude à une puissance impaire de $\sqrt{\varepsilon}$. Cela provient d'un jeu subtil d'interactions sur Γ des différents types de profils $\mathcal{U}_a$, $\mathcal{U}_b$ et $\mathcal{U}_c$. La résolution du développement -c'est à dire l'échelle de l'amplitude- des profils $\mathcal{U}_a$ et $\mathcal{U}_c$ passe ainsi de ε à $\sqrt{\varepsilon}$.

Il est possible de montrer un résultat analogue en terme de propagation. On peut également caractériser les données initiales susceptibles de donner de tels développements. Une telle étude, dans un contexte un peu différent, est menée dans [11].

Le théorème 1.1 donné en introduction est une conséquence du théorème 2.1. En fait, on peut même déduire du théorème 2.1 des estimations beaucoup plus précises, et optimales, de $u^\varepsilon - u^0$. Les lignes qui suivent présentent ces estimations.

Bien sûr, si u^0 admet une discontinuité le long de Γ, on ne peut pas espérer que u^0 soit limite dans $H^{\infty,\frac{1}{2}}$ $(:= \bigcap_{m\geqslant 0} H^{m,\frac{1}{2}})$ ou L^∞ d'une famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de solutions des problèmes $(P^\varepsilon(T_0))_{\varepsilon\in]0,1]}$. En général, on a, au contraire, la discrépance :

$$\lim_{x_n\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} P_0 u^\varepsilon \neq \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x_n\to 0} P_0 u^\varepsilon.$$

Sur $P_0^\perp$, on a l'estimation :

$$||P_0^\perp(u^\varepsilon - u^0)||_{L^\infty(\Omega_{T_1})} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

et pour tout m entier naturel,

$$||P_0^\perp(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_{T_1})} = O(\varepsilon^{\frac{3}{4}-\frac{s}{2}}) \quad \forall s\in[0,\frac{3}{2}], \tag{3}$$

$$||P_0(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_{T_1})} = O(\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}) \quad \forall s\in[0,\frac{1}{2}]. \tag{4}$$

La différence d'un facteur $\sqrt{\varepsilon}$ entre les estimations (3) et (4) traduit le fait intuitif que la couche limite a plus à faire sur $\ker \mathring{A}_n$ selon lequel le saut est polarisé. En effet, la condition de Rankine-Hugoniot ([10]) exprime que la singularité est "polarisée" selon $\ker \mathring{A}_n$:

Proposition 2.1 *La fonction $P_0^\perp u^0$ est continue. Si f et u^0 sont de classe C^r sur Ω_{T_0} alors $P_0^\perp u^0$ est de classe C^{r+1} sur Ω_{T_0}.*

Rappelons que la régularité de u se propage au sens suivant : si $u|_{t=0}$ est de classe C^r sur $\mathbb{R}^n$ et f est C^r sur Ω_{T_0} alors u est C^r sur Ω_{T_0}. On donne en annexe une preuve de ces résultats sur les singularités hyperboliques.

Tournons maintenant notre attention vers des singularités plus faibles comme des sauts de dérivées normales. La proposition 2.1 montre que ces singularités sont elles-aussi polarisées selon $\ker \mathring{A}_n$. Il est ainsi naturel que les estimations soient meilleures sur certaines coordonnées. Plus précisemment, on peut écrire, pour r entier naturel, si u^0 est de classe C^r sur Ω_{T_0}, les estimations suivantes :

$$||P_0^\perp (u^\varepsilon - u^0)||_{L^\infty(\Omega_{T_0})} = O(\varepsilon),$$
$$||P_0(u^\varepsilon - u^0)||_{L^\infty(\Omega_{T_0})} = O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r}{2}}),$$

et, pour tout entier naturel m, en notant P_- (resp P_+) le projecteur orthogonal sur la somme des sous-espaces propres de $\mathring{A}_n$ associés aux valeurs propres strictement négatives (resp positives), et

$$\begin{aligned}
a^\varepsilon &:= ||P_0(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_{T_0})}, \\
b^\varepsilon &:= ||P_-(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} + ||P_+(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^-)}, \\
c^\varepsilon &:= ||P_+(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} + ||P_-(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^-)},
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
a^\varepsilon &= O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r+1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} + \varepsilon^{\frac{r+5}{2}+\frac{1}{2}-s}) \quad \forall s \in [0, min(r+\frac{3}{2}, \frac{r}{2}+3)], \\
b^\varepsilon &= O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r+2}{2}+\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} + \varepsilon^{\frac{r+3}{2}+\frac{1}{2}-s}) \quad \forall s \in [0, min(r+\frac{5}{2}, \frac{r}{2}+2)], \\
c^\varepsilon &= O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r+2}{2}+\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} + \varepsilon^{\frac{r+5}{2}+\frac{1}{2}-s}) \quad \forall s \in [0, min(r+\frac{5}{2}, \frac{r}{2}+3)],
\end{aligned}$$

Ces estimations mettent en évidence la compétition de trois catégories de termes : les termes en $c\varepsilon$ sont déjà présents lorsqu'on regarde l'approximation visqueuse de solutions régulières sur Ω_{T_0} ([4],[3]) tandis que les autres termes correspondent à des couches limites. On a notamment que le premier profil $\mathcal{U}_b$ de couche limite non nul vérifie $P_0^\perp \mathcal{U}_b = 0$, donc en particulier $P_0^\perp \mathcal{U}_b^0 = 0$. En ce qui concerne la CLNC, on verra que la polarisation est différente selon que l'on se trouve d'un côté ou de l'autre de Γ (cf proposition 6.7).

3 Réduction du problème $P^0(T)$

On se ramène à un problème dans le demi-espace doublant le nombre d'inconnues. Les conditions de transmission imposées par l'équation (les conditions de Rankine-Hugoniot de la proposition 2.1) se traduisent par des conditions aux limites maximales dissipatives (en fait même conservatives). Ceci nous permettra de retrouver des résultats d'existence de u^0 et sera utile dans la construction des profils.

A u défini sur Ω_T, on associe u_+ sa restriction à Ω_T^+, u_- défini par $u_-(t,x) := u(t,y,-x_n)$ pour tout (t,x) dans Ω_T^+ et $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix}$.
On a alors que u vérifie $P^0(T)$ si et seulement si $\mathbf{u}$ vérifie le problème

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \tag{5}$$
$$M\mathbf{u} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{6}$$

où

$$\begin{aligned}
M &:= \begin{bmatrix} P_0^\perp & -P_0^\perp \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} := \begin{bmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_- \end{bmatrix}, \\
\mathcal{H}_- &:= A_0^-(t,x)\partial_t + \sum_{1\leqslant j\leqslant n-1} A_j^-(t,x)\partial_j - A_n^-(t,x)\partial_n + B^-(t,x), \\
\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) &:= \begin{bmatrix} F(t,x,u_+) \\ F(t,y,-x_n,u_-) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

On introduit la matrice normale de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{H}}$: $\mathbf{A}_n := \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & -A_n \end{bmatrix}$.
On a le lemme suivant :

Lemme 3.1 *La condition aux limites est maximale dissipative ie la forme quadratique* $< \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\cdot, \cdot >$ *est négative sur le sous-espace* $\ker M$ *et* $\ker M$ *est maximale pour cette propriété.*

Preuve. Soit $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix} \in \ker M$. On a donc $P_0^\perp u_+ = P_0^\perp u_-$. Or,

$$< \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\mathbf{u}, \mathbf{u} > = < \mathring{A}_n u_+, u_+ > - < \mathring{A}_n u_-, u_- > .$$

Utilisant l'identité $\mathring{A}_n P_0 = 0$ et la symétrie de $\mathring{A}_n$, on obtient

$$< \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\mathbf{u}, \mathbf{u} > = < \mathring{A}_n P_0^\perp u_+, P_0^\perp u_+ > - < \mathring{A}_n P_0^\perp u_-, P_0^\perp u_- > = 0.$$

Ainsi la forme quadratique $< \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\cdot, \cdot >$ est négative sur le sous-espace $\ker M$. De plus, $\mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}$ possède $N + d_0$ valeurs propres négatives ou nulles et la somme des sous-espaces spectraux associés constitue un sous-espace maximal sur lequel la forme quadratique $< \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}} \cdot, \cdot >$ est négative. Comme tous les sous-espaces maximaux pour cette propriété ont la même dimension $N + d_0 = dim \ker M$, le lemme est prouvé. $\square$

Notons que la preuve du lemme 3.1 montre que la condition aux limites est conservative c'est à dire que

$$< \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \mathbf{u} >= 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \ker M.$$

Afin d'énoncer des résultats utiles pour la construction des parties hyperboliques des profils (les $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j$), on considère le cas de condition aux limites non homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \underline{M}\mathbf{u} = g(t,y) \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{array} \right. \tag{7}$$

$\underline{M}$ est une matrice constante de taille $L \times 2N$, avec $L = 2(N - d_0)$, de rang L. La fonction g est supposée H^∞ sur Γ_T et à valeurs dans $\mathbb{R}^L$. Notons que, quitte à multiplier à gauche par une matrice adéquate, la condition aux limites (6) peut se réécrire sous la forme $\underline{M}\mathbf{u} = 0$.

Le théorème suivant concerne le prolongement des solutions de (7) :

Théorème 3.1 *Si T est strictement positif et $u \in H^\infty(\Omega_T)$ est solution de* (7) *alors il existe $T_0 > T$ et un unique prolongement de u (en une fonction encore noté u) dans $H^\infty(\Omega_{T_0})$ solution de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+, \\ \underline{M}\mathbf{u} = g(t,y) \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0}. \end{array} \right. \tag{8}$$

De plus, si $T^* := \sup\{T_0 > T/$ il existe un prolongement de u en une fonction encore notée u solution de (8)$\}$ *est fini, alors* $\lim_{t \to T^*} ||\mathbf{u}||_{L^\infty(\Omega_t^+)} = +\infty$*. Dans le cas linéaire , $T^* = \infty$.*

On peut déduire du théorème 3.1 l'existence d'une solution régulière au problème mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \underline{M}(t,y)\mathbf{u} = g(t,y) \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ \mathbf{u} = a \quad \text{quand } t = 0 \end{array} \right. \tag{9}$$

Il est nécessaire pour cela d'imposer certaines conditions de compatibilité entre données initiales et données au bord. En effet, si $\mathbf{u}$ est une solution régulière de (9), avec $T > 0$, on déduit de l'équation l'existence de fonctions

$(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles que

$$(\partial_t^k \mathbf{u})|_{t=0} = H_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{|\alpha|\leqslant k}). \tag{10}$$

où α désigne un n-uplet $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$, $|\alpha|$ la longueur $|\alpha| := \alpha_1+...+\alpha_n$ et $\partial_x^\alpha := \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$.

Comme par ailleurs, il existe des fonctions $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles que

$$\partial_t^k(\underline{M}\mathbf{u}) = G_k(t, y, (\partial_t^j \mathbf{u})_{j\leqslant k}),$$

on a sur $\{t = x_n = 0\}$ les relations :

$$(R_k): \quad G_k(0, y, (H_j(y, 0, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{|\alpha|\leqslant j}))_{0\leqslant j\leqslant k}) = \partial_t^k g(0, y).$$

Le résultat suivant montre que, réciproquement, ces conditions sont suffisantes à l'existence d'une solution régulière locale en temps.

Théorème 3.2 *Soit $a \in H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *La fonction a vérifie les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$,*
(2) *Il existe $T > 0$ et $\mathbf{u}$ solution régulière de* (9).

Le théorème précédent est non vide :

Proposition 3.1 *Il existe $a \in H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$ qui vérifie les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$*

Preuve. Dans cette preuve, on notera $\partial_x^\alpha = \partial_y^{\alpha'}\partial_n^{\alpha_n}$ où $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$. Il existe des fonctions $(\tilde{H}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\tilde{G}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de classe C^∞ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{j\leqslant k}) &= (-1)^k(A_n)^k\partial_n^k a + \tilde{H}_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{\alpha\in I_k}) \\ G_k(t, y, (\partial_t^j \mathbf{u})_{1\leqslant j\leqslant k}) &= \underline{M}\partial_t^k \mathbf{u} + \tilde{G}_k(t, y, (\partial_t^j \mathbf{u})_{j\leqslant k-1}), \end{aligned}$$

où $I_k := \{\alpha \in \mathbb{N}^n / \ \ |\alpha| \leqslant k, \alpha_n \neq k\}$. Ainsi les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ se réécrivent :

$$\begin{aligned} (-1)^k\underline{M}(A_n)^k\partial_n^k a|_{x_n=0} &= (\partial_t^k g)|_{t=0} - \underline{M}\tilde{H}_k(y, 0, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{\alpha\in I_k}) \\ &- \tilde{G}_k(0, y, (H_j(y, 0, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{|\alpha|\leqslant j}))_{j\leqslant k-1}). \end{aligned}$$

On a le lemme algébrique suivant :

Lemme 3.2 *Pour tout entier naturel k, on a* $\mathrm{Im}\,\underline{M}(A_n)^k = \mathbb{R}^L$.

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ker(A_n)^k = \ker A_n \subset \ker \underline{M}$, et donc $\mathrm{Im}\,\underline{M}(A_n)^k = \mathrm{Im}\,\underline{M} = \mathbb{R}^L$. En effet, comme $(A_n)^k$ est symétrique, tout vecteur x de $\mathbb{R}^L$ se décompose en $x = x_0 + x_1$ où $x_0 \in \ker A_n^k \subset \ker \underline{M}$ et $x_1 \subset \mathrm{Im}\,A_n^k$. Un vecteur quelconque y de $\mathbb{R}^L$ s'écrit donc $y = \underline{M}x = \underline{M}x_1$, avec $x_1 \subset \mathrm{Im}\,A_n^k$. □

De la surjectivité des $\underline{M}(A_n)^k$, on déduit, par récurrence, l'existence d'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $\underline{M}a_0 = g|_{t=0}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\underline{M}(A_n)^k a_k = &-(-1)^k \underline{M}\tilde{H}_k(y, 0, (\partial_y^{\alpha'} a_{\alpha_n}|_{x_n=0})_{\alpha\in I_k}) \\ &-\tilde{G}_k(0, y, (H_j(y, 0, (\partial_y^{\alpha'} a_{\alpha_n}|_{x_n=0})_{\alpha\in I_j}))_{j\leqslant k-1})\end{aligned}$$

On conclut par une variante du théorème de Borel ([11]).

Lemme 3.3 *Il existe une application*

$$\begin{array}{rcl} B : (H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))^{\mathbb{N}} & \to & H^\infty(\mathbb{R}^n_+) \\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & a \end{array}$$

telle que
• *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\partial_n^k a|_{x_n=0} = a_k$,*
• *Il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m \geqslant 0$ tel que pour toute famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))^{\mathbb{N}}$,*

$$(11) \qquad ||a||_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_m \sum_{0\leqslant k\leqslant m} ||a_k||_{H^m(\mathbb{R}^{n-1})} + C.$$

Le deuxième point du lemme précédent n'est pas utile ici mais servira dans le paragraphe 5.1. □

La démonstration prouve le résultat suivant, qui précise les degrés de liberté dont on dispose sur les traces au bord des dérivées normales de la donnée initiale.

Proposition 3.2 *Il existe des fonctions $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telle que, pour $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, les assertions suivantes soient équivalentes :*
(1). *La fonction a vérifie les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$,*
(2). *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a*

$$(\partial_n^k a)(y, 0) \in \mathcal{A}_k(y, (\partial_x^\alpha a)(y, 0))_{\alpha\in I_k}) + \ker \underline{M},$$

où $I_k := \{\alpha \in \mathbb{N}^n / \quad |\alpha| \leqslant k, \alpha_n \neq k\}$.

Remarque 3.1 *Dans le cas linéaire, on peut fournir une preuve un peu différente se ramenant au cas où* **u** *est nul dans le passé. En particulier, on verra que les profils $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ vérifient des problèmes linéaires.*

Une preuve du théorème 3.1 et de la proposition 2.1 est donnée en annexe.

4 Preuve du théorème 2.1

On utilise encore une fois une réduction à un problème dans le demi-espace. On applique ensuite la stratégie de [11] : on commence par prouver l'existence de solutions approchées sous la forme de développements BKW, puis on conclut par un théorème d'approximation.

4.1 Réduction à un problème dans le demi-espace

On a que u^ε est solution de $P^\varepsilon(T)$ si et seulement si $\mathbf{u}^\varepsilon$ est solution de

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \tag{12}$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{u}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{u}^\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{13}$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{u} := \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} - (\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) + \varepsilon \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}),$$
$$\boldsymbol{\Delta} := \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} := \begin{bmatrix} Id & -Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & Id \end{bmatrix}$$

où la matrice Id est de taille $N \times N$. La condition (13) est une condition de raccord sur Γ. Puisque l'opérateur est d'ordre 2, cette condition concerne la continuité de la fonction et de sa dérivée normale.

On notera

$$\mathcal{N}_\theta(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta^+, \mathbb{R}^{2N})), \quad \mathcal{N}_z(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_z^+, \mathbb{R}^{2N})).$$

On introduit l'espace

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+) := \{ \boldsymbol{\mathcal{U}}(t,x,\theta,z) = \boldsymbol{\mathcal{U}}_a(t,x) + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b(t,x,\theta) + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c(t,x,z) \quad \text{où} \\ \boldsymbol{\mathcal{U}}_a \in H^\infty(\Omega_T^+, \mathbb{R}^{2N}), \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}_b \in \mathcal{N}_\theta(T), \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}_c \in \mathcal{N}_z(T) \} \end{aligned}$$

Bien sûr, si $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T)$, la fonction $\boldsymbol{\mathcal{U}} := \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+ \\ \mathcal{U}_- \end{bmatrix}$, où, pour tout $(t,x,\theta,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{U}_+(t,x,\theta,z) := U(t,x,\theta,z), \quad \mathcal{U}_-(t,x,\theta,z) := \mathcal{U}(t,y,-x_n,-\theta,-z),$$

est dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$.

Une réciproque est donné par la proposition suivante

Proposition 4.1 *Soit* $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{P}(\Omega_T^+)$, $\boldsymbol{\mathcal{U}} := \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+ \\ \mathcal{U}_- \end{bmatrix}$. *Il existe* $\mathcal{U} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T)$ *tel que, pour tout* $(t, x, \theta, z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{U}(t, x, \theta, z) = \mathcal{U}_+(t, x, \theta, z), \quad \mathcal{U}(t, y, -x_n, -\theta, -z) = \mathcal{U}_-(t, x, \theta, z).$$

Preuve. On commence par énoncer la variante suivante du lemme 6.3 :

Lemme 4.1 *Soient* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. *Il existe une fonction* $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$, $(x, \theta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto a(x, \theta) \in \mathbb{R}^N$, *telle que, pour tout entier naturel* k, $\partial_\theta^k a|_{\theta=0} = a_k$.

La démonstration du lemme 4.1 suit directement celle du lemme 6.3. On ne la détaille pas ici. Le lemme 4.1 assure l'existence de $\overline{\mathcal{U}}_{\pm,b}$ dans $H^\infty(\Omega_T^\pm, \mathcal{S}(\mathbb{R}^-))$ et de $\overline{\mathcal{U}}_{\pm,c}$ dans $H^\infty(\Omega_T^\pm, \mathcal{S}(\mathbb{R}^-))$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(t, x) \in \Omega_T^\pm$,

$$\begin{aligned} \partial_\theta^k \overline{\mathcal{U}}_{\pm,b}|_{\theta=0^\pm} &= \partial_\theta^k \mathcal{U}_{\pm,b}|_{\theta=0^\pm}, \\ \partial_\theta^k \overline{\mathcal{U}}_{\pm,c}|_{z=0^\pm} &= \partial_\theta^k \mathcal{U}_{\pm,c}|_{z=0^\pm}. \end{aligned}$$

On définit alors $\mathcal{U} := \mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_c$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a &:= \begin{cases} \mathcal{U}_a^+ & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \mathcal{U}_a^- & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^- \end{cases}, \\ \mathcal{U}_b &:= \begin{cases} \mathcal{U}_{\pm,b} & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_\theta^+ \\ \overline{\mathcal{U}_{\pm,b}} & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_\theta^- \end{cases}, \\ \mathcal{U}_c &:= \begin{cases} \mathcal{U}_{\pm,c} & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_z^+ \\ \overline{\mathcal{U}_{\pm,c}} & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_z^- \end{cases} \qquad \square \end{aligned}$$

Attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans les théorèmes énoncés dans cet article, on évalue les profils en

$$(t, x, z, \theta) := (t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}),$$

c'est à dire avec x_n, θ et z de même signe. La proposition 4.1 montre que l'on peut déplier un profil $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{P}(\Omega_T^+)$ en un profil $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T)$ en ne faisant porter une singularité que sur la seule ligne de (dé)pliage $\{x_n = 0\}$.

On introduit l'ensemble

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T) := \{(\mathbf{u}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1} \in (H^m(\Omega_T^+))^{]0,1]} / \quad \exists \varepsilon' \in]0,1] / \quad \sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon']} ||\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T} < \infty\}$$

où

$$||\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T} := \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{max(0,k-\frac{1}{2})} \, |\partial_n^k \mathbf{u}^\varepsilon|^+_{m-k,T}.$$

On a bien sûr que $(a^\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{G}^m(T) \Leftrightarrow (\mathbf{a}^\varepsilon)_\varepsilon \in \boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T)$.
On cherche $\mathbf{u}^\varepsilon$ sous la forme

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{u}^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j\, \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1}\, \mathbf{R}_\varepsilon(t,x).$$

On introduit aussi

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T) := \{(\mathbf{u}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1} \in (H^m(\Omega_T^+))^{]0,1]} / \sup_{\varepsilon\in]0,1]} |\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T} < \infty\}$$

où

$$|\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T} := \sum_{k=0}^{m} |(\varepsilon\partial_n)^k \mathbf{u}^\varepsilon|^+_{m-k,T}.$$

Une propriété remarquable de $\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T)$ est la suivante : soit $\boldsymbol{\mathcal{V}}_b$ dans $\mathcal{N}_\theta(T)$ et $\boldsymbol{\mathcal{V}}_c$ dans $\mathcal{N}_z(T)$ alors la famille $(\mathbf{b}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par

$$\text{(15)} \qquad \mathbf{b}^\varepsilon(t,x) := \varepsilon^{-\frac{1}{4}}\, \boldsymbol{\mathcal{V}}_b(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\, \boldsymbol{\mathcal{V}}_c(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon})$$

est pour tout $m \in \mathbb{N}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T)$.

Nous allons maintenant énoncer deux théorèmes synthétisant les résultats des deux grandes étapes de la démonstration du théorème 2.1. Les preuves suivent dans les paragraphes suivants.

4.2 Solutions approchées

Le théorème suivant assure l'existence de solutions approchées sous forme de développements de la forme (14) de tout ordre. Par commodité, il est utile d'introduire un profil de CLNC supplémentaire. On introduit aussi, pour tout $T \geqslant 0$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$, les espaces :

$$\mathcal{B}^s(T) \quad := \quad \{(v_\varepsilon)_\varepsilon \in (H^s(\Gamma_T))^{]0,1]} / \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} ||v^\varepsilon||_{H^s(\Gamma_T)} < \infty\}.$$

Théorème 4.1 *Il existe T_1 dans $]0,T_0]$ tel que pour tout entier naturel k, il existe $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ famille de profils de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega^+_{T_1})$, $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{k+1}_c$ dans $\mathcal{N}_z(T)$ tel que la famille $(\mathbf{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par*

$$\text{(16)} \qquad \mathbf{a}^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j\, \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{U}}^{k+1}_c(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon})$$

vérifie

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{a}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}^{k+\frac{1}{2}} \mathbf{R}_\varepsilon \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_1}^+ \tag{17}$$

$$\mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{a}^\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon}^k R_{cl,1}^\varepsilon \\ \sqrt{\varepsilon}^{k-1} R_{cl,2}^\varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_1} \tag{18}$$

où, pour tout entier naturel m*,* $(\mathbf{R}_\varepsilon)_\varepsilon$ *est dans* $\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T_1)$*,* $(R_{cl,1}^\varepsilon)_\varepsilon$ *et* $(R_{cl,2}^\varepsilon)_\varepsilon$ *sont dans* $\mathcal{B}^m(T)$*. Les profils* $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1$ *sont identiquement nuls. De plus, les profils* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ *vérifient les points* 2 *et* 3 *du théorème* 2.1.

La preuve du théorème 4.1 constitue le paragraphe 6.

4.3 Théorème d'approximation

Le théorème suivant prouve l'existence d'une famille de solutions exactes de la famille de problèmes $(12)-(13)$ admettant un développement asymptotique dont la partie principale est une famille de solutions approchées des équations (12) et (13). On note

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(T) := \{(\mathbf{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in (W^{m,\infty}(\Omega_T^+))^{]0,1]} / \\ \sup_{\varepsilon\in]0,1]} \sum_{k,l/\quad l+k\leqslant m} ||(\varepsilon\partial_n)^k Z^l \mathbf{a}^\varepsilon||_{L^\infty(\Omega_T^+)} \leqslant \infty\}.$$

Théorème 4.2 *Soit* $M > \frac{1}{4}$*. Alors si* $(\mathbf{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(T)$ *est une famille de solutions approchées de* $(12)-(13)$ *au sens où*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{a}^\varepsilon = \varepsilon^M \mathbf{g}_\varepsilon \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \tag{19}$$

$$\mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{a}^\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{20}$$

avec $(\mathbf{g}_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *dans* $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T)$ *alors il existe un réel* $\varepsilon_0 \in]0,1]$ *et une famille* $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ *de solutions exactes de* $(12)-(13)$ *telle que*

$$(\frac{\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}^\varepsilon}{\varepsilon^M})_{\varepsilon\in]0,1]} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T).$$

Ce théorème est une variante du théorème d'approximation prouvé dans [11]. Seules les conditions aux limites sont différentes. Le point clé est que le linéarisé de (19)-(20) est bien posé dans L^2 ([5]). Les estimations sont ensuite dérivées comme dans [11].

On note alors que pour $k \geqslant 2$ la solution approchée donnée par le théorème 4.1 vérifie presque les hypothèses du théorème précédent. Seule la condition (20) n'est pas vérifiée. Mais l'erreur étant d'ordre $\sqrt{\varepsilon}^{k-1}$, on peut -quitte à faire un relèvement et à le retrancher de la solution du théorème 4.1- supposer que les hypothèses du théorème 4.2 sont satisfaites. □

Signalons qu'il suffisait de montrer le point 1 du théorème 2.1 pour k grand, la forme du développement elle-même permettant ensuite de conclure pour un k quelconque. Comme l'explique [11], l'argument précèdent présente cependant des défauts qui sont ici occultés par le cadre simplifié de l'article. En effet, si l'on considère ici, par commodité, des profils de régularité infinie en dehors du front d'onde, on se convainc aisément que la construction successive des profils consomme de la régularité. Par ailleurs, si l'on considère des données initiales (ou dans le passé) plus générales, il est intéressant de savoir combien de profils il est nécessaire de prescrire. Dans cette optique, la démarche proposée ici semble assez robuste puisque l'on utilise le théorème 4.1 avec seulement $k = 2$. C'est la raison qui nous à conduit à minimiser l'hypothèse sur M dans le théorème 4.2. La limitation $M > \frac{1}{4}$ provient de la manière dont est traitée la non linéarité. Celle-ci est contrôlée par une norme L^∞ qui est obtenue à l'aide d'un plongement Sobolev (proposition 5.6). On renvoie le lecteur à [11] pour plus de détails à ce sujet.

5 Preuve du théorème 4.2

5.1 Données initiales

On s'intéressera, pour une famille de données initiales $(\mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ donnée, aux solutions régulières $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1}$ de (12), (13) vérifiant :

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon \quad \text{quand} \quad t = 0.$$

Pour qu'il soit possible d'obtenir une solution régulière, des relations de compatibilité entre données initiales et données au bord doivent être vérifiées. A l'ordre 0, cela donne :

$$(R_0^\varepsilon) : \quad \mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon \end{bmatrix} |_{x_n = 0} = 0.$$

De plus, notant $\mathbf{A}(t, x, \partial_x) := \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathbf{A}_j(t, x) \partial_j$, (12) peut se réécrire

$$\mathbf{A}_0 \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon = -(\mathbf{A} - \varepsilon \mathbf{\Delta}) \mathbf{u}^\varepsilon + \mathbf{F}(t, x, \mathbf{u}^\varepsilon) + \mathbf{f}(t, x)$$

$\partial_t \mathbf{u}^\varepsilon$, et par conséquent aussi les dérivées temporelles d'ordres supérieurs, peuvent ainsi se réexprimer en fonction des dérivées spatiales. Ainsi si à la donnée initiale $\mathbf{u_0^\varepsilon}$ correspond une solution régulière $\mathbf{u}^\varepsilon$ de (12), les $\partial_t^j \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0}$ sont déterminés univoquement en fonction de $\mathbf{u_0^\varepsilon}$ et des données du système. On peut donc introduire **à priori** sans ambiguité les valeurs $\mathbf{u_j^\varepsilon}$ attendues pour $\partial_t^j \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0}$. On définit alors la relation de compatibilité à l'ordre j :

$$(R_j^\varepsilon): \quad \mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{u_j^\varepsilon} \\ \partial_n \mathbf{u_j^\varepsilon} \end{bmatrix}|_{x_n=0} = 0.$$

Introduisons les normes :

$$||u||_{H^s_{co}(\mathbb{R}^n_+)} := \sum_{j \leqslant s} ||Z'^j u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)},$$

où Z' désigne une dérivation prise parmi $(Z_i)_{1\leqslant i \leqslant n}$, et les espaces :

$$\mathcal{G}^s_{init} := \{(\mathbf{u_0^\varepsilon})_{\varepsilon \in]0,1]} \in (H^s(\mathbb{R}^n_+))^{]0,1]} /$$
$$\sup_{\varepsilon\in]0,1]} (||\mathbf{u_0^\varepsilon}||_{H^s_{co}(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} ||\partial_n^k \mathbf{u_0^\varepsilon}||_{H^{s-k}_{co}(\mathbb{R}^n_+)}) < \infty\}.$$

Proposition 5.1 *Sous les hypothèse du théorème* 4.2*, il existe une famille de restes initiaux* $(\mathbf{r}_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *dans* $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}^m_{init}$ *tel que pour tout* $\varepsilon \in]0,1]$*, la donnée initiale* $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ *définie, pour* x *dans* $\mathbb{R}^n_+$*, par*

$$\mathbf{u_0^\varepsilon}(x) := \mathbf{a}_\varepsilon(0,x) + \varepsilon^M \, \mathbf{r}_\varepsilon(x) \tag{21}$$

vérifie les relations de compatibilité $(R_k^\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$*.*

Preuve. On suit la méthode de la preuve de la proposition 3.3 de [11]. On déduit de (19) l'existence de fonctions $(\mathcal{H}^j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, de classe C^∞, telles que

$$\begin{aligned}(\partial_t^j \mathbf{a}^\varepsilon)(0,x) &= \varepsilon^j \mathbf{A}_0^{-j}(0,x).(\partial_n^{2j}\mathbf{a}^\varepsilon)(0,x) \\ &+ \mathcal{H}^j(\varepsilon, x, (\partial^\alpha \mathbf{a}^\varepsilon(0,x))_{\alpha\in I_j}) - \varepsilon^M (\partial_t^j \mathbf{g}_\varepsilon)(0,x)\end{aligned} \tag{22}$$

où $I_j := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leqslant 2j; \alpha_n \neq 2j\}$.

On cherche $\mathbf{r}^\varepsilon$ telle que les fonctions $(\mathbf{u_j^\varepsilon})_{j\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\mathbf{u_0^\varepsilon}(x) := \mathbf{a}_\varepsilon(0,x) + \varepsilon^M \, \mathbf{r}_\varepsilon(x)$$

et, pour $j \geqslant 1$,

$$\mathbf{u_j^\varepsilon} := \varepsilon^j \mathbf{A}_0^{-j}(0,x).(\partial_n^{2j}\mathbf{u}^\varepsilon)(0,x) + \mathcal{H}^j(\varepsilon, x, (\partial^\alpha \mathbf{u}^\varepsilon(0,x))_{\alpha\in I_j})$$

vérifient, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\varepsilon}\\ \partial_n \mathbf{u}_{\mathbf{j}}^{\varepsilon}\end{bmatrix}|_{x_n=0}=0.$$

Compte tenu de (22) et de (20), celà revient à des identités de la forme

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_{\mathbf{j}}^{\varepsilon}\\ \partial_n \mathbf{r}_{\mathbf{j}}^{\varepsilon}\end{bmatrix}|_{x_n=0}=0 \tag{23}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\mathbf{j}}^{\varepsilon} := \quad & \varepsilon^j \mathbf{A}_0^{-j}(0,x).(\partial_n^{2j}\mathbf{r}^{\varepsilon})(0,x)\\ + \quad & \sum_{\alpha\in I_j}\mathcal{H}^{\flat,\alpha}(\varepsilon,x,\varepsilon^M(\partial^{\alpha}\mathbf{r}^{\varepsilon}(0,x))_{\alpha\in I_j},(\partial^{\alpha}\mathbf{a}^{\varepsilon}(0,x))_{\alpha\in I_j}).\partial^{\alpha}\mathbf{r}^{\varepsilon}(0,x)\\ - \quad & (\partial_t^j \mathbf{g}_{\varepsilon})(0,x).\end{aligned}$$

On note $N_0 := \begin{bmatrix} Id & -Id\end{bmatrix}$ et $N_1 := \begin{bmatrix} Id & Id\end{bmatrix}$ où Id est la matrice identité de taille $N\times N$. Ainsi, on a $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}N_0 & 0\\ O & N_1\end{bmatrix}$, où 0 est une matrice de N lignes et $2N$ colonnes remplie de 0.

On montre, par récurrence que l'on peut construire une famille de fonctions $(\mathfrak{r}_j^{\varepsilon})_{j\in\mathbb{N}}$ de $H^{\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$ telles que

- $$\begin{aligned}\varepsilon^j \mathbf{A}_0^{-j}(0,y,0).\mathfrak{r}_{2j}^{\varepsilon}(y) \quad + & \quad \sum_{\alpha\in I_j} g^{\alpha}(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha'}}\mathfrak{r}_{\tilde{\alpha_n}}^{\varepsilon}(y))_{\tilde\alpha\in I_j},(\partial^{\tilde\alpha}\mathbf{a}^{\varepsilon}|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde\alpha\in I_j})\\ - & \quad (\partial_t^j\mathbf{g}_{\varepsilon})(0,y,0)\in \ker N_0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \varepsilon^j \mathbf{A}_0^{-j}(0,y,0).\mathfrak{r}_{2j+1}^{\varepsilon}(y)+\varepsilon^j\partial_n(\mathbf{A}_0^{-j})(0,y,0).\mathfrak{r}_{2j}^{\varepsilon}\\ + \quad & \sum_{\alpha\in I_j}\{\tilde g^{\alpha}(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha'}}\mathfrak{r}_{\tilde{\alpha_n}}^{\varepsilon}(y))_{\tilde\alpha\in I_j},(\partial^{\tilde\alpha}\mathbf{a}^{\varepsilon}|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde\alpha\in I_j})\\ + \quad & D_r g^{\alpha}(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha'}}\mathfrak{r}_{\tilde{\alpha_n}}^{\varepsilon}(y))_{\tilde\alpha\in I_j},(\partial^{\tilde\alpha}\mathbf{a}^{\varepsilon}|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde\alpha\in I_j}).\partial^{\alpha'}\mathfrak{r}_{\alpha_n+1}^{\varepsilon}(y)\\ + \quad & D_a g^{\alpha}(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha'}}\mathfrak{r}_{\tilde{\alpha_n}}^{\varepsilon}(y))_{\tilde\alpha\in I_j},(\partial^{\tilde\alpha}\mathbf{a}^{\varepsilon}|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde\alpha\in I_j}).\partial^{\alpha'}\mathfrak{r}_{\alpha_n+1}^{\varepsilon}(y)\}\\ - \quad & (\partial_t^j\partial_n\mathbf{g}_{\varepsilon})(0,y,0)\in\ker N_1\end{aligned}$$

où
► $\alpha=(\alpha',\alpha_n)$, $\quad \tilde\alpha=(\tilde\alpha',\tilde\alpha_n)$,

► $g^\alpha(\varepsilon, y, r, a) := \mathcal{H}^{\flat,\alpha}(\varepsilon, y, 0, \varepsilon^M r, a).r$,
► $\tilde{g}^\alpha(\varepsilon, y, r, a) := \partial_n \mathcal{H}^{\flat,\alpha}(\varepsilon, y, 0, \varepsilon^M r, a).r$,
► $D_r g$ (respectivement $D_a g$) désigne la dérivée par rapport à r de g (respectivement par rapport à a de $g^\alpha(\varepsilon, y, r, a)$).

• $\forall m \in \mathbb{N} \quad sup_{\varepsilon\in]0,1]} N(\varepsilon, m) < \infty$ où

$$N(\varepsilon, m) := ||\mathfrak{r}_0^\varepsilon||_{H^m(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} ||\mathfrak{r}_k^\varepsilon||_{H^{m-k}(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{24}$$

On ne détaille pas l'obtention de (24) qui utilise des inégalités de type Moser/ Gargliardo-Nirenberg.

Pour chaque $\varepsilon \in]0, 1]$, le lemme de Borel 6.3 assure l'existence de $\mathbf{r}^\varepsilon$ dans $H^\infty(\Omega_T^+)$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\partial_n^j \mathbf{r}^\varepsilon|_{x_n=0} = \mathfrak{r}_j^\varepsilon$. L'identité (23) est ainsi vérifiée pour tout $j \in \mathbb{N}$. Ainsi la famille $(\mathbf{u}_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par (21) vérifie les relations de compatibilité $(R_k^\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus, l'estimation (11) combinée à (24) assure que la famille $(\mathbf{u}_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est dans $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{init}^m$. □

La démonstration assure le résultat suivant :

Proposition 5.2 *Ils existent des fonctions $\mathcal{C}_j$, de classe C^∞, telles que pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, pour toute donnée initiale $\mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, on a l'équivalence suivante :*
1. La fonction $\mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon$ vérifie les relations de compatibilité $(R_k^\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$.
2. La fonction $\mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon$ vérifie, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$(\partial_n^{2j}\mathbf{u}^\varepsilon)|_{x_n=0} \in \mathcal{C}_{2j}(\varepsilon, y, ((\partial^\alpha \mathbf{a}^\varepsilon)|_{x_n=0})_{\alpha\in I_j}, (\partial^\alpha \mathbf{u}^\varepsilon|_{x_n=0})_{\alpha\in I_j}) + \ker N_0,$$
$$(\partial_n^{2j+1}\mathbf{u}^\varepsilon)|_{x_n=0} \in \mathcal{C}_{2j+1}(\varepsilon, y, ((\partial^\alpha \mathbf{a}^\varepsilon)|_{x_n=0})_{\alpha\in I_j^\sharp}, (\partial^\alpha \mathbf{u}^\varepsilon)|_{x_n=0})_{\alpha\in I_j^\sharp}) + \ker N_1.$$

où I_j et $I_j^\sharp$ désignent respectivement les ensembles

$$I_j := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leqslant 2j; \alpha_n \neq 2j\} \quad \text{et}$$
$$I_j^\sharp := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leqslant 2j+1, \quad \alpha_i \leqslant 2j \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

5.2 Approximation

L'existence d'une famille de données initiales adéquates étant attestée par la proposition 5.1, on travaille dans la suite dans le cas de données nulles dans le passé. En effet, si l'on dispose d'une famille de données initiales $\mathbf{u}_\mathbf{0}^\varepsilon(x) := \mathbf{a}_\varepsilon(0, x) + \varepsilon^M \mathbf{r}_\varepsilon(x)$ donnée par la proposition 5.1, le lemme de Borel assure, pour tout ε, l'existence de $\mathbf{w}_\varepsilon^\natural$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\partial_t^j \mathbf{w}_\varepsilon^\natural|_{t=0} = \mathbf{r}^\varepsilon{}_j$, où $\mathbf{r}^\varepsilon{}_j$ est définie comme dans la preuve de la proposition 5.1. On travaille alors avec $\tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}^\natural_\varepsilon$. L'appartenance de $\mathbf{r}^\varepsilon$ à $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}^m_{init}$ assure que $\tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon$ vérifie le même type de problème que $\mathbf{w}_\varepsilon$ avec un terme source modifié $\tilde{\mathbf{g}_\varepsilon}$ qui est toujours dans $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}^m$.

Notons $\mathbf{w}_\varepsilon := \frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{a}_\varepsilon}{\varepsilon^M}$ et considèrons le problème

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}} - \varepsilon\boldsymbol{\Delta})\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{G}(t,x,\mathbf{a}^\varepsilon, \varepsilon^M \mathbf{w}_\varepsilon)\mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{g}_\varepsilon \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \tag{25}$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{w}_\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{26}$$

$$\mathbf{w}_\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_0 \tag{27}$$

où $\mathbf{G}$ est telle que $\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) = \mathbf{G}(t,x,\mathbf{u},\mathbf{v}).\mathbf{v}$.

Considèrons $m > \frac{n}{2}$.

Notons que si le problème est non linéaire, les non linéarités sont multipliées par des ε, ce qui assure l'existence de solutions en temps long. On commence par établir des estimations conormales pour le problème linéaire :

$$\begin{aligned} (-\varepsilon\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\mathcal{H}})\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{f} \quad & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \\ \mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{w}_\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \quad & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ \mathbf{w}_\varepsilon = 0 \quad & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_0 \end{aligned}$$

On définit, pour $\lambda \geqslant 1$ et m entier naturel, les normes à poids :

$$|\mathbf{w}||_{0,\lambda,T} := ||e^{-\lambda t}\mathbf{w}||_{L^2(\Omega_T)}, \quad |\mathbf{w}||_{m,\lambda,T} := \sum_{k\leqslant m} \lambda^{m-k} |Z^k \mathbf{w}||_{0,\lambda,T}.$$

On omettra dans les lignes qui suivent l'indice ε de $\mathbf{w}_\varepsilon$. Cela ne doit pas entraîner de confusion.

Proposition 5.3 *Soit m un entier naturel. Il existe $\lambda_m \geqslant 1$ tel que pour $\lambda \geqslant \lambda_m$ et pout tout $\varepsilon \in]0,1]$:*

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_m |\mathbf{f}||^2_{m,\lambda,T} \tag{28}$$

Preuve : On commence par montrer le cas $m = 0$. Pour cela, on multiplie l'équation à gauche par ${}^t\mathbf{w}$ et on intégre par parties en écrivant

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} := \boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat + \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_n$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat := \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{A_i} Z_i + \boldsymbol{A_n^\flat} Z_n, \quad \boldsymbol{A_n} = \boldsymbol{\mathring{A}_n} + x_n \boldsymbol{A_n^\flat}.$$

Notons que

$$2\int_{x_n>0} {}^t\mathbf{w}\boldsymbol{\mathring{A}_n}\partial_n\mathbf{w} = -({}^t\mathbf{w}\boldsymbol{\mathring{A}_n}\mathbf{w})|_{x_n=0}$$

$$-\int_{x_n>0} {}^t\mathbf{w}\partial_n^2\mathbf{w} = ({}^t\mathbf{w}\partial_n\mathbf{w})|_{x_n=0} + \int_{x_n>0} {}^t\partial_n\mathbf{w}.\partial_n\mathbf{w}.$$

Notant $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} w^+ \\ w^- \end{bmatrix}$, la condition aux limites (26) se traduit par

$$w^+|_{x_n=0} = w^-|_{x_n=0}, \quad \partial_n w^+|_{x_n=0} = -\partial_n w^-|_{x_n=0}.$$

Ainsi

$$({}^t\mathbf{w}\boldsymbol{\mathring{A}_n}\mathbf{w})|_{x_n=0} = ({}^t w^+ \mathring{A}_n w^+)|_{x_n=0} - ({}^t w^- \mathring{A}_n w^-)|_{x_n=0} = 0,$$

$$({}^t\mathbf{w}\partial_n\mathbf{w})|_{x_n=0} = ({}^t w^+\partial_n w^+)|_{x_n=0} + ({}^t w^-\partial_n w^-)|_{x_n=0} = 0.$$

On obtient ainsi

(29) $$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}||^2_{0,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}||^2_{0,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_0| < \mathbf{f}, \mathbf{w} >_{0,\lambda,T} |.$$

et donc (28) dans le cas $m = 0$. On procède ensuite par récurrence sur m, suivant [2], [11]. Supposons l'estimation (28) établie avec $0, 1, ..., m-1$ en lieu et place de m. Pour $\alpha := (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note, au cours de cette démonstration, $Z^\alpha := Z_0^{\alpha_0}...Z_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha| := \alpha_0 + ... + \alpha_n$. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\partial_n(x_n\partial_n)^k$ est de la forme

$$\partial_n + x_n.\mathit{Opérateur} \quad \mathit{en} \quad \partial_n, x_n\partial_n,$$

on a

$$\partial_n(x_n\partial_n)^k w^+|_{x_n=0} = -\partial_n(x_n\partial_n)^k w^-|_{x_n=0}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, l'opérateur de dérivation Z^α commutent donc exactement avec les conditions aux limites sur Γ_T. Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\alpha| \leqslant m$, $Z^\alpha\mathbf{w}$ est solution de

$$\begin{aligned} (-\varepsilon\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\mathcal{H}})Z^\alpha\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{f}} \quad &\text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \mathbf{N}\begin{bmatrix} Z^\alpha\mathbf{w} \\ \partial_n Z^\alpha\mathbf{w} \end{bmatrix} = 0 \quad &\text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ Z^\alpha\mathbf{w} = 0 \quad &\text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+ \end{aligned}$$

où le second membre $\tilde{\mathbf{f}}$ vaut $\tilde{\mathbf{f}} := Z^\alpha \mathbf{f} + [\boldsymbol{\mathcal{H}}, Z^\alpha]\mathbf{w} + [-\varepsilon\boldsymbol{\Delta}, Z^\alpha]\mathbf{w}$. Appliquant l'estimation (29), et multipliant par $\lambda^{2(m-|\alpha|)}$, on a :

$$\varepsilon(\lambda^{m-|\alpha|}|\nabla_x Z^\alpha \mathbf{w}||_{0,\lambda,T})^2 + \lambda(\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha \mathbf{w}||_{0,\lambda,T})^2 \leqslant \\ \lambda^{-1}\lambda_0\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < \tilde{\mathbf{f}}, Z^\alpha \mathbf{w} >_{0,\lambda,T} |.$$

Pour contrôler le membre de gauche, il nous faut majorer les termes

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < Z^\alpha \mathbf{f}, Z^\alpha \mathbf{w} >_{0,\lambda,T} |, \tag{30}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < [\boldsymbol{\mathcal{H}}, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} >_{0,\lambda,T} |, \tag{31}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < [-\varepsilon\boldsymbol{\Delta}, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} >_{0,\lambda,T} |. \tag{32}$$

Le terme (30) se majore par

$$(\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha \mathbf{f}||^2_{0,\lambda,T}).(\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha \mathbf{w}||^2_{0,\lambda,T})$$

puis par

$$\lambda^{-1}c_\delta\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha \mathbf{f}||^2_{0,\lambda,T} + \lambda\delta\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha \mathbf{w}||^2_{0,\lambda,T},$$

pour un δ assez petit de façon à ce que le terme en v soit absorbé dans le membre de gauche.

Considèrons maintenant le terme (32). Pour le majorer, il suffit de majorer une somme de termes dont les “plus mauvais” contiennent deux dérivées normales ∂_n et sont de la forme :

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < [-\varepsilon\partial_n^2, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} >_{0,\lambda,T} |.$$

On effectue une intégration par parties. Remarquant que pour $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, le commutateur $[\partial_n^2, Z_n^k]$ est de la forme $\sum_{i\in I_k}\partial_n^2 Z_n^{k_i}$, et tirant parti de la condition aux limites, on a que le terme tout intégré est nul. On est ainsi ramené à contrôler

$$\varepsilon\lambda^{2(m-||\alpha||)}|\partial_n Z^\beta \mathbf{w}||^2_{0,\lambda}|\partial_n Z^\alpha \mathbf{w}||^2_{0,\lambda},$$

que l'on majore par

$$\delta\varepsilon|\partial_n \mathbf{w}||^2_{m,\lambda} + c_\delta\varepsilon|\partial_n \mathbf{w}||^2_{m-1,\lambda},$$

où δ est choisi suffisamment petit pour absorber le terme $\delta\varepsilon|\partial_n \mathbf{w}||^2_{m,\lambda}$ dans le membre de gauche. Le terme $\varepsilon|\partial_n \mathbf{w}||^2_{m-1,\lambda}$ est majoré par le membre de droite de l'estimation (28) d'après l'hypothèse de récurrence.

Il reste à contrôler le terme (32). Pour cela, on doit contrôler des termes de la forme

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < [\mathbf{A}_i Z_i, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha\mathbf{w} >_{L^2_\lambda} | \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{33}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < [\mathbf{A}^\flat_n Z_n, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha\mathbf{w} >_{L^2_\lambda} |, \tag{34}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}| < [\mathring{\mathbf{A}}_n \partial_n, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha\mathbf{w} >_{L^2_\lambda} |. \tag{35}$$

Les termes (33) et (34) se majorent par $cte|\mathbf{w}||^2_{m,\lambda}$ et sont absorbés dans le membre de gauche de (28). Pour le terme (35), on remarque que l'on a, par l'équation,

$$\mathring{\mathbf{A}}_n \partial_n \mathbf{w} = -\boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat \mathbf{w} + \varepsilon \boldsymbol{\Delta} \mathbf{w} + \mathbf{f},$$

ce qui nous ramène à des cas précédents. □

On utilise le shéma itératif $(\mathbf{w}^\nu)_{\nu \geqslant 0}$ défini par $\mathbf{w}^0 := 0$ et

$$\begin{aligned}
(-\varepsilon\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\mathcal{H}})\mathbf{w}^{\nu+1} = \mathbf{G}(t,x,\mathbf{a}^\varepsilon, \varepsilon^M \mathbf{w}^\nu)\mathbf{w}^{\nu+1} + \mathbf{g}_\varepsilon \quad & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\
\mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{w}^{\nu+1} \\ \partial_n \mathbf{w}^{\nu+1} \end{bmatrix} = 0 \quad & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\
\mathbf{w}^{\nu+1} = 0 \quad & \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+
\end{aligned}$$

On notera dans la suite $||.||_\infty$ au lieu de $||.||_{L^\infty(\Omega_T)}$.

Proposition 5.4 *Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $\lambda_1 > 0$ tel que si $\varepsilon^M ||\mathbf{w}^\nu||_\infty \leqslant \mu$ alors*

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(|\mathbf{g}_\varepsilon||^2_{m,\lambda,T}$$

$$+(|\mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M ||\mathbf{w}^{\nu+1}||_\infty |\mathbf{w}^\nu||_{m,\lambda,T})^2). \tag{36}$$

Preuve : Il s'agit d'estimer en norme $|.||^2_{0,\lambda,T}$ des termes de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|} Z^\alpha (\mathbf{G}(t,x,\mathbf{a},\varepsilon^M \mathbf{w}^\nu)\mathbf{w}^{\nu+1}). \tag{37}$$

Lorsqu'on développe (37), on obtient deux types de termes :
• ceux où $\mathbf{w}^\nu$ n'est pas dérivé. Ils sont contrôlés par $cte|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T}$ et pour λ assez grand sont absorbés dans le membre de gauche de (36).
• ceux où $\mathbf{w}^\nu$ est dérivé. Ils sont de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|}\Phi^\varepsilon(t,x) Z^{\beta_1}\mathbf{a} ... Z^{\beta_i}\mathbf{a} Z^{\gamma_1}(\varepsilon^M \mathbf{w}^\nu) ... Z^{\gamma_j}(\varepsilon^M \mathbf{w}^\nu) Z^\delta \mathbf{w}^{\nu+1}$$

où $\Phi^\varepsilon(t,x)$ est uniformément borné dans L^∞ et

$$|\beta_1| + ... + |\beta_i| + |\gamma_1| + ... + |\gamma_j| + |\delta| \leqslant |\alpha|.$$

On doit donc majorer en $|.||^2_{0,\lambda,T}$ des termes de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|} Z^{\gamma_1}(\varepsilon^M \mathbf{w}^\nu) ... Z^{\gamma_j}(\varepsilon^M \mathbf{w}^\nu) Z^\delta \mathbf{w}^{\nu+1}. \tag{38}$$

On utilise les inégalités de Moser suivantes [2] :

Lemme 5.1 *Soient m un entier naturel, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_l$ des fonctions de $H^m(\Omega_T)$ et $\alpha := (\alpha_1, ...\alpha_l)$ dans $\mathbb{N}^l$ avec $|\alpha| := |\alpha_1| + ... + |\alpha_l| \leqslant m$. Alors, pour tout $\lambda \geqslant 1$, on a :*

$$\lambda^{m-|\alpha|} |Z_1^\alpha \mathbf{a}_1 ... Z_l^\alpha \mathbf{a}_l||_{0,\lambda,T} \leqslant c \sum_j (\Pi_{i\neq j} ||\mathbf{a}_i||_\infty) |\mathbf{a}_j||_{m,\lambda,T}.$$

La constante c étant indépendante des $\mathbf{a}_i$.

Le terme (38) se majore alors par

$$cte(|\mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M ||\mathbf{w}^{\nu+1}||_\infty |\mathbf{w}^\nu||_{m,\lambda,T})^2$$

ce qui achève la preuve. $\square$

La proposition précédente utilise une norme L^∞ pour contrôler la nonlinéarité dans les estimations conormales. Nous allons maintenant voir comment majorer à son tour cette norme L^∞ par plongement de Sobolev. L'idée est d'être économe en ε et en dérivées normales. On se tourne donc, à l'instar de [11], vers des plongements de Sobolev anisotropes. La proposition qui suit est démontrée dans [2].

Proposition 5.5 *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $\mathbf{w}$ dans $H^m(\Omega_T)$*

$$||\mathbf{w}||_\infty \leqslant \rho T e^{\lambda T} (|\mathbf{w}||_{m,\lambda,T} + |\partial_n \mathbf{w}||_{m,\lambda,T}).$$

On en déduit par un simple changement de variable

Proposition 5.6 *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $\mathbf{w} \in H^m(\Omega_T)$, pour tout $\varepsilon \in [0,1]$*

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} ||\mathbf{w}||_\infty \leqslant \rho T e^{\lambda T} (|\mathbf{w}||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon} |\partial_n \mathbf{w}||_{m,\lambda,T}).$$

Fixons un réel $\mu > 0$ arbitraire, un réel λ_1 donné par la proposition 5.4, $\lambda \geqslant 2\lambda_1$ et $h := \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} |\mathbf{g}_\varepsilon||_{m,\lambda,T}$. On choisit alors $0 < \varepsilon < 1$ assez petit pour que

$$\varepsilon^{M-\frac{1}{4}} h\rho T e^{\lambda T} \leqslant min(\mu, 1). \tag{39}$$

Proposition 5.7 *La suite $(\mathbf{w}^\nu)_\nu$ satisfait, pour tout entier naturel ν,*

$$\varepsilon^M \, ||\mathbf{w}^\nu||_\infty \leqslant \mu, \quad ||\mathbf{w}^\nu||_{m,\lambda,T} \leqslant h.$$

Preuve : on raisonne par récurrence sur ν. La proposition est vraie pour $\nu = 0$. Supposons la vraie pour ν quelconque. Alors par la proposition 5.4, on a

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + (|\mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \\ \varepsilon^M h||\mathbf{w}^{\nu+1}||_\infty)^2).$$

On utilise la proposition 5.6 pour contrôler $||\mathbf{w}^{\nu+1}||_\infty$. Ainsi

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 \\ +(|\mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^{M-\frac{1}{4}} h\rho T e^{\lambda T}(|\mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n \mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T})^2)$$

donc

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 \\ +(2|\mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n \mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T})^2)$$

et, par suite,

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 \\ +8|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + 2\varepsilon|\partial_n \mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T})$$

d'où

$$\frac{1}{2}\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + 8|\mathbf{w}^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T})$$

ainsi $|\mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{h}{2}$ et $\sqrt{\varepsilon}|\nabla_x \mathbf{w}^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{h}{2}$ d'où

$$\varepsilon^M||\mathbf{w}^{\nu+1}||_\infty \leqslant \varepsilon^{M-\frac{1}{4}}\rho T e^{\lambda T} h \leqslant \mu \quad \square$$

On obtient alors classiquement une solution régulière de $(25) - (26) - (27)$ qui vérifie par passage à la limite $\varepsilon^M||\mathbf{w}^\nu||_\infty = O(1)$ et $|\mathbf{w}^\nu||_{m,\lambda,T} = O(1)$. Les dérivées normales itérées sont estimées ensuite par récurrence par l'équation.

On a ainsi obtenu un réel ε_0 et une famille $(\mathbf{w}_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ solution de (25)-(26)-(27) vérifiant $sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}||u^\varepsilon|_{m,T}^\varepsilon < \infty$. Notons que le choix de ε_0 dépend de m car dans (39), la quantité h dépend de m. Cependant, la théorie classique des systèmes paraboliques, et en particulier le critère d'explosion, assure que les $(\mathbf{w}_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ sont dans $H^\infty(\Omega_T^+)$. $\square$

6 Preuve du théorème 4.1

6.1 Composition non linéaire des profils

On commence par donner une définition qui donne un sens rigoureux aux développements que nous allons utiliser.

Définition 6.1 *On dira qu'une famille de fonctions régulières $(\mathbf{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ satisfait*

$$\mathbf{u}^\varepsilon \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

pour une suite donnée de profils $\boldsymbol{\mathcal{U}}^j$ de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ si pour tout k entier naturel, la famille $(\mathbf{r}_k^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1}$ définie par

$$\mathbf{r}_k^\varepsilon := \mathbf{u}^\varepsilon - \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

est dans $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T)$.

L'espace $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ a la propriété de préservation par composition non linéaire suivante :

Proposition 6.1 *Soit $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>\mathbf{0}}$ une famille de fonctions de $H^\infty(\Omega_T^+,\mathbb{R}^{2N})$ satisfaisant*

$$\mathbf{u}^\varepsilon \sim \sum_{\mathbf{j}\geqslant \mathbf{0}} \sqrt{\varepsilon}^{\mathbf{j}} \boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{j}}(\mathbf{t},\mathbf{x},\frac{\mathbf{x_n}}{\varepsilon},\frac{\mathbf{x_n}}{\sqrt{\varepsilon}})$$

pour une suite donnée de profils $\boldsymbol{\mathcal{U}}^j := \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0$ de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ et $\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u})$ une fonction $C^\infty(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}^{2N},\mathbb{R}^{2N})$ telle que $\mathbf{F}(t,x,0)=0$. Alors,

1. *Pour tout $\varepsilon>0$, la fonction $(t,x)\mapsto \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{t},\mathbf{x}))$ est dans $H^\infty(\Omega_T^+,\mathbb{R}^{2N})$. De plus, il existe des profils $(\boldsymbol{\mathcal{V}}^j)_{j\geqslant 0}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ tels que*

$$\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}^\varepsilon(t,x)) \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \boldsymbol{\mathcal{V}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

2. *Le profil* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^0$ *se décompose en* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^0 = \boldsymbol{\mathcal{V}}^0_a + \boldsymbol{\mathcal{V}}^0_b + \boldsymbol{\mathcal{V}}^0_c$ *avec*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{V}}^0_a &:= \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}^0_b &:= \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a+\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}^0_c &:= \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a+\mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}^0_b+\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_c) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a+\mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}^0_b).
\end{aligned}$$

Lorsque $\mathbf{u}$ *est dans* $\mathcal{N}_\theta(T)$*,* $\mathring{\mathbf{u}}$ *désigne la trace de* $\mathbf{u}$ *en* $\theta = 0$*.*

3. *Pour tout* $j \geqslant 1$*, il existe des fonctions* (Q^j_a, Q^j_b, Q^j_c)*,* C^∞ *de leurs arguments, tels que le profil* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j$ *se décompose en* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j = \boldsymbol{\mathcal{V}}^j_a + \boldsymbol{\mathcal{V}}^j_b + \boldsymbol{\mathcal{V}}^j_c$ *avec*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{V}}^j_a &:= \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a).\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a + Q^j_a(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_a)_{k\leqslant j-1}),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}^j_b &:= \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a+\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b).(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a+\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b) - \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a).\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a\\
&\quad+ Q^j_b(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_a,\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_b)_{k\leqslant j-1}),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}^j_c &:= Q^j_c(t,x,z,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_a,\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_c)_{k\leqslant j},(\partial^i_\theta\mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}^k_b)_{i+k\leqslant j}).
\end{aligned}$$

De plus $Q^1_a = Q^1_b = 0$*.*

L'esprit de la proposition est le suivant : notre analyse fait intervenir des développements avec des profils et un reste. Aussi, la propriété d'algèbre n'est pas essentielle si l'erreur commise peut être incluse dans le reste. La stratégie de la démonstration se résume ainsi : on introduit la plus petite algèbre contenant $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega^+_T)$. Celle-ci contient des profils dépendants à la fois de $\frac{x_n}{\varepsilon}$ et de $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$. C'est un développement avec de tels profils que l'on obtient à priori par composition non linéaire. On redéveloppe les profils couplés en un développement de CLNC en contrôlant l'erreur à tout ordre.

Preuve. Considérons

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(\Omega^+_T) := H^\infty(\Omega^+_T,\mathbb{R}^{2N}) \oplus \mathcal{N}_\theta(T) \oplus H^\infty(\Omega^+_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta\times\mathbb{R}^+_z,\mathbb{R}^{2N}))$$

et étendons la définition 6.1 à de tels profils. $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(\Omega^+_T)$ est l'espace considéré par O.Guès dans [2]. C'est la plus petite algèbre contenant $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega^+_T)$.
On a, pour $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j)_{j\geqslant 0}$ famille de profils de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega^+_T)$,

$$\mathbf{F}(t,x,\sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^j) \sim \sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j$$

où $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^0 := \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0)$ et, pour $j \geqslant 1$, $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j := \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k)_{k\leqslant j})$ avec, pour tout $(t,x,(u^k)_{0\leqslant k\leqslant j}) \in \Omega^+_T \times (\mathbb{R}^{2N})^{j+1}$,

$$\tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(u^k)_{0\leqslant k\leqslant j}) := \sum_{n=1}^{j}\sum_{k_1+\ldots+k_n=j}\frac{1}{n!}D^n_u\mathbf{F}(t,x,u^0)(u^{k_1},\ldots,u^{k_n}),$$

la somme portant sur des $k_i \neq 0$ pour i compris entre 1 et n.
Les $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j$ sont dans $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(\Omega_T^+)$ et se décomposent en $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_a + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_b + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_c$ avec

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_a &:= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_a)_{k\leqslant j}),\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_b &:= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_a + \boldsymbol{\mathcal{U}}^k_b)_{k\leqslant j}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_a)_{k\leqslant j}),\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_c &:= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k)_{k\leqslant j}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_a + \boldsymbol{\mathcal{U}}^k_b)_{k\leqslant j}).
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant redévelopper les termes $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_c$ en développements de CLNC. Avant cela, on réalise une manipulation préliminaire qui sera importante pour asurer la décroissance rapide des profils du développement obtenu. Elle consiste essentiellement à factoriser par des termes de CLNC. Effectuant un développement de Taylor en θ, on a l'existence de matrices de taille $2N \times 2N$ régulières $(\tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat})_{0\leqslant k\leqslant j}$ telles que pour tout (t,x) dans Ω_T^+, pour tout $\mathfrak{u} := (u_k)_{0\leqslant k\leqslant j}$ et $\mathfrak{v} := (v_k)_{0\leqslant k\leqslant j}$ vecteurs de $(\mathbb{R}^{2N})^{j+1}$,

$$\tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,\mathfrak{u}) = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{u},\mathfrak{v}).v_k.$$

Ainsi, notant $\mathfrak{U}_d := (U^k_d)_{0\leqslant k\leqslant j}$, où d désigne a, b ou c, on a

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j_c = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a+\mathfrak{U}_b,\mathfrak{U}_c).\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_c.$$

Or pour tout $0 \leqslant k \leqslant j$, le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_b$ admet pour développement de Taylor : $\sum_{i\geqslant 0} \frac{\theta^i}{i!}\partial^i_\theta \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}^k_b$. Le profil $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j$ admet donc également un développement de Taylor de la forme $\sum_{i\geqslant 0} \theta^i\, \boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,i}$ avec

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,0} = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a+\mathring{\mathfrak{U}}_b,\mathfrak{U}_c).\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_c$$

et, pour $j \geqslant 1$,

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,i} = \sum \frac{1}{\Pi_{l=0}^{N}\frac{1}{n_l!}} \sum_{k=0}^{j} D^{\mathfrak{n}}_u \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a+\mathring{\mathfrak{U}}_b,\mathfrak{U}_c).\boldsymbol{\mathcal{U}}^k_c.\mathfrak{u}^0\ldots\mathfrak{u}^N.$$

Dans l'expression précédente, la somme porte sur l'ensemble des indices $\mathfrak{n} := (n_0,\ldots,n_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$ et des indices $(k^l_m)_{l/n_l>0} \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{n_l} k^l_m = i$. On a désigné par $D^{\mathfrak{n}}_u$ le produit de dérivées $D^{\mathfrak{n}}_u := D^{n_0}_{u_0}\ldots D^{n_N}_{u_N}$ où, pour $0 \leqslant l \leqslant N$, $D^{n_l}_{u_l}$ est la dérivée d'ordre n_l par rapport à la variable u^l de

$$\tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,(u^l)_{0\leqslant k\leqslant j},\mathfrak{U}_c).$$

Cette dérivée est évaluée en $\mathfrak{u}^l := (u^{l,k_1^l}, ..., u^{l,k_{n_l}^l})$ où $u^{k,l} = \frac{\partial_\theta^l \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^k}{l!}$.

Par suite, on a $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_c^j \sim \sum_{i\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^i \, \tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}^{j,i}$ avec $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}^{j,i} := z^i \, \boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,i}$ dans $\mathcal{N}_z(T)$.

Notant $\boldsymbol{\mathcal{V}}_a^j := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_a^j, \quad \boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_b^j, \boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j := \sum_{i+k=j} \boldsymbol{\mathcal{W}}^{k,i}$ et $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j := \boldsymbol{\mathcal{V}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j + \boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j$ on a que $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$, qu'il existe Q_c^j tel que

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j := Q_c^j(t, x, z, (\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k, \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^k)_{0\leqslant k\leqslant j}, (\partial_\theta^i \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^k)_{i+k\leqslant j})$$

et que $\sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \, \boldsymbol{\mathcal{U}}^j \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \, \boldsymbol{\mathcal{V}}^j$ $\square$

La proposition suivante complète la proposition 6.1. C'est un corollaire de la démonstration de cette dernière où sont explicitées les fonctions Qj. Ces propriétés seront utiles dans la démonstration du point 3 du théorème 2.1.

Proposition 6.2 *Si les* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{2j+1})_{0\leqslant j\leqslant [\frac{r}{2}]}$ *sont nuls, alors les* $(\boldsymbol{\mathcal{V}}_a^{2j+1})_{0\leqslant j\leqslant [\frac{r}{2}]}$ *le sont aussi. Si les* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$ *(resp les* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$*) alors les* $(\boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$ *(resp les* $(\boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$*) le sont aussi.*

La preuve de la proposition 6.1 est reportée à la fin de l'article.

6.2 L'ansatz de résolution

Un développement de Taylor au premier ordre assure l'existence de matrices $\mathbf{A}_n^\flat(t, x)$ de taille $2N \times 2N$ avec une régularité C^∞ en (t, x) tel que $\mathbf{A}_n = \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}} + x_n \mathbf{A}_n^\flat$. La substitution du développement

$$\sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \, \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

à la place de $\mathbf{u}^\varepsilon$ dans (12) donne, par la proposition précédente un développement (l'ansatz de résolution)

$$\sum_{j\geqslant -2} \sqrt{\varepsilon}^j \, \boldsymbol{\mathcal{F}}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

où les profils $\boldsymbol{\mathcal{F}}^j$ sont dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ et se décomposent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^{-2} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{-2} = 0, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-2} = \mathring{\mathbf{A}}_n \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 - \partial_{zz} \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0, \\
\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^{-1} &= 0, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{-1} = \mathring{\mathbf{A}}_n \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-1} = \mathring{\mathbf{A}}_n \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1 - \partial_{zz} \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1, \\
\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^0 &= \boldsymbol{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 - \mathbf{F}(t, x, \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0) - \mathbf{f}(t, x), \\
\boldsymbol{\mathcal{F}}_b^0 &= \mathring{\mathbf{A}}_n \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^1 + \boldsymbol{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 + \mathbf{A}_n^\flat \theta \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 - \partial_{\theta\theta} \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 - \mathbf{F}(t, x, \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0) + \mathbf{F}(t, x, \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0), \\
\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^0 &= \mathring{\mathbf{A}}_n \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 - \partial_{zz} \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 + q_c^0,
\end{aligned}$$

et pour $j \geqslant 1$

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^j & = & \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j - \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + q_a^j,\\ \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^j & = & \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} + \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j + \mathbf{A}_n^\flat\theta\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j - \partial_{\theta\theta}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j\\ & - & \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0+\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0)(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j+\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j) + \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + q_b^j,\\ \boldsymbol{\mathcal{F}}_c^j & = & \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} - \partial_{zz}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} + q_c^j,\end{array}$$

où l'on a regroupé un certain nombre de termes de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} q_c^0 & := & -\mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0+\mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j+\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0) + \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0+\mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j), \quad q_a^1 := 0, \quad q_b^1 := 0,\\ q_c^1 & := & -Q_c^1(t,x,z,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j+\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j)_{j\leqslant 1}),(\partial_\theta^i\mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j)_{i+j\leqslant 1}),\end{array}$$

et, pour $k \geqslant 2$,

$$\begin{array}{rcl} q_a^k & := & -\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{k-2} - Q_a^k(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j)_{j\leqslant k-1}),\\ q_b^k & := & -\boldsymbol{\Delta}_b\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{k-1} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{k-2} - Q_b^k(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j,\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j)_{j\leqslant k-1}),\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} q_c^k & := & (\boldsymbol{\mathcal{H}}-\boldsymbol{\Delta}_c)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^k - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{k-2}\\ & - & Q_c^k(t,x,z,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j,\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j)_{j\leqslant k},(\partial_\theta^i\mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j)_{i+j\leqslant k}),\end{array}$$

où $\boldsymbol{\Delta}_b$ et $\boldsymbol{\Delta}_c$ désignent les opérateurs $\boldsymbol{\Delta}_b := 2\sum_{i=1}^n \partial_\theta\partial_i$ et $\boldsymbol{\Delta}_c := 2\sum_{i=1}^n \partial_z\partial_i$.

6.3 L'ansatz de résolution des conditions aux limites

Rappelons que l'on note $N_0 := \begin{bmatrix} Id & -Id\end{bmatrix}$ et $N_1 := \begin{bmatrix} Id & Id\end{bmatrix}$ où Id est la matrice identité de taille $N \times N$. Ainsi, on a $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_0 & 0\\ O & N_1\end{bmatrix}$, où 0 est une matrice de N lignes et $2N$ colonnes remplie de 0. La condition aux limites (13) se réécrit donc :

$$N_0\mathbf{u}^\varepsilon = N_1\partial_n\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{quand} \quad (t,x)\in\Gamma_T.$$

La substitution du développement $\sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$ à $\mathbf{u}^\varepsilon$ dans (13) donne l'ansatz de résolution des conditions aux limite $\begin{bmatrix}\sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl0}^j(t,y)\\ \sum_{j\geqslant -2}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl1}^j(t,y)\end{bmatrix}$ où

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl1}^{-2} := N_1\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0|_{x_n=z=0}, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl1}^{-1} := N_1(\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1|_{x_n=z=0} + \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0|_{x_n=\theta=0})$$

et pour $j \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl0} &:= N_0\boldsymbol{\mathcal{U}}^j|_{x_n=\theta=z=0}, \\ \boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl1} &:= N_1(\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c|_{x_n=z=0} + \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b|_{x_n=\theta=0} + \partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1}|_{x_n=\theta=z=0}). \end{aligned}$$

On note $\mathbf{P}_0 := \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Id} := \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$ et $\mathbf{P}_0^\perp := \mathbf{Id} - \mathbf{P}_0$.

Définissons le problème $(S^{-1}_{cl}(T))$:

$$N_1\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_c|_{z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \tag{42}$$

$(S^0_{cl}(T))$:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\mathcal{U}}^0|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{43}$$

$$N_0\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}^0|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \tag{44}$$

$$N_1(\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c + \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b)|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \tag{45}$$

et pour $j \geqslant 1$, $(S^j_{cl}(T))$:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\mathcal{U}}^j|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{46}$$

$$N_0\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}^j|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \tag{47}$$

$$N_1(\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c + \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b + \partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1})|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \tag{48}$$

On notera que $N_0 = N_0\mathbf{P}_0 + M$. On a choisi comme dans [11] de garder une dépendance en x_n au niveau de la couche limite et de faire baver les conditions aux limites (42), (44), (45), (47), (48).

Remarquons que si le problème (S^{-1}_{cl}) est vérifié alors $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-2}_{cl1}$ est nul. Pour $j \geqslant 0$, si (S^j_{cl}) est vérifié alors $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{j-1}_{cl1}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl0}$ sont nuls. La résolution des $(S^j_{cl}(T))_{j\geqslant -1}$ assure l'annulation des $(\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl0})_{j\geqslant 0}$ et $(\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl1})_{j\geqslant -2}$.

6.4 Problème hyperbolique-parabolique

On donne ici un résultat pour une équation de type hyperbolique-parabolique (cf [2]). Considèrons $T_0 > 0$, les matrices de taille $2N \times 2N$: $\mathbf{K} := \mathbf{P}_0\mathbf{A}^\flat_n\mathbf{P}_0$ et l'opérateur $\mathbb{H} := \mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{P}_0 + \mathbf{K}\theta\partial_\theta$ qui est un opérateur symétrique hyperbolique sur l'espace des fonctions W telles que $\mathbf{P}_0^\perp W = 0$.

On considère le problème mixte :

$$\mathbf{P}_0^\perp W = 0, \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_\theta \tag{49}$$

$$(-\partial^2_\theta + \mathbb{H})W = \mathbf{P}_0 f(t,x,p,W) \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_\theta \tag{50}$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} W \\ \partial_\theta W \end{bmatrix}|_{\theta=0} = \mathbf{N}b \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \tag{51}$$

$$W = a \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \{0\} \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^+_\theta \tag{52}$$

où $f(t,x,p,W)$ est une fonction de classe C^∞ , à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et vérifie $f|_{t\leqslant 0}=0$ et $f(t,x,0,0)=0$, la fonction $p(t,x,\theta)$ joue le rôle de paramètre et appartient à $\mathcal{N}_\theta(T_0)$. On suppose que b est dans $H^\infty(\Omega_T^+)$, vérifie $\mathbf{P}_0^\perp\, b=0$ et $b|_{t\leqslant 0}=0$. La donnée initiale a est dans l'espace $H^\infty(\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}_\theta^+)$.

Examinons la compatibilité des données : si W est solution régulière de (49), (50) et (52), avec $T>0$, alors il existe des fonctions $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles que les fonctions

$$W_k(x,\theta):=(\partial_t^k W)(0,x,\theta)$$

vérifient

$$W_k(x,\theta)=I_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}). \tag{53}$$

Si, de plus, W est solution de (51), on a nécessairement sur le coin $\{t=\theta=0\}$ les relations de compatibilité

$$(R'_k):\quad \mathbf{N}\begin{bmatrix} W\\ \partial_\theta W\end{bmatrix}=\mathbf{N}b_k$$

où $b_k:=(\partial_t^k b)|_{t=0}$. La réciproque est contenue dans le théorème suivant

Théorème 6.1 *Soit $a\in H^\infty(\mathbb{R}_+^n,\mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *La fonction a vérifie les relations (R'_k),*
(2) *Il existe $T\in]0,T_0]$ et $W\in\mathcal{N}_\theta(T)$ solution régulière de* (49)*,* (50)*,* (51) *et* (52)*.*

La relation (R'_k) dépend des termes sources par l'intermédiaire des $(\partial_t^l f)_{l\leqslant k-1}$, $(D_p^{(l)}f)_{l\leqslant k-1}$, $(D_W^{(l)}f)_{l\leqslant k-1}$ et $(\partial_t^l b)_{l\leqslant k}$.

De même que pour le problème mixte hyperbolique , on a le résultat d'existence de données compatibles à tout ordre suivant :

Proposition 6.3 *Il existe $a\in H^\infty(\mathbb{R}_+^n,\mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$ vérifiant les relations $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Preuve. On commence par remarquer qu'ils existent des fonctions $(\tilde I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles

$$I_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k})=\partial_\theta^{2k}a+\tilde I_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k,j<2k}). \tag{54}$$

On obtient ainsi, par récurrence, l'existence de fonctions $(a_k)_{j\in\mathbb{N}}\in H^\infty(\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}_+)$ telles que

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} a_0\\ \partial_\theta a_0\end{bmatrix}|_{\theta=0}=b|_{t=0},\quad \mathbf{N}\begin{bmatrix} I_k(x,\theta,(\partial_x^i a_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k})\\ \partial_\theta(I_k(x,\theta,(\partial_x^i a_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}))\end{bmatrix}|_{\theta=0}=(\partial_t^k b)|_{t=0}\quad \forall k\geqslant 1.$$

On conclut avec le lemme 4.1. $\square$

Notons que l'on a un résultat similaire à la proposition 3.2 :

Proposition 6.4 *Il existe des fonctions $(\mathcal{A}'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telle que, pour $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, les assertions suivantes soient équivalentes :*
(1). La fonction a vérifie les relations $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$,
(2). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$(\partial_\theta^{2k} a)(x,0) \in \mathcal{A}'_{2k}(x, (\partial_x^i \partial_\theta^j a)(x,0))_{i+\frac{j}{2}\leqslant k, j<2k}) + \ker N_0,$$
$$(\partial_\theta^{2k+1} a)(x,0) \in \mathcal{A}'_{2k+1}(x, (\partial_x^i \partial_\theta^j a)(x,0))_{i+\frac{j}{2}\leqslant k+\frac{1}{2}, j\leqslant 2k}) + \ker N_1.$$

On peut caractériser le temps d'existence maximal des solutions régulières du théorème 6.1.

Théorème 6.2 *Lorsque l'assertion 2 du théorème 6.1 est vérifiée, si T est pris maximal et si $T > T_0$ alors $||W||_{L^\infty(\Omega_t\times\mathbb{R}^+_\theta)} \to +\infty$ quand $t \to T^-$. Dans le cas où l'équation (50) est linéaire, on peut prendre $T = T_0$.*

Le problème mixte (49), (50), (51) et (52) est très proche du problème étudié et résolu dans [2]. Le changement essentiel concerne les conditions aux limites. Nous allons ici seulement montrer comment la méthode de [2] s'adapte au cas qui nous intéresse ici. La proposition 6.3 assurant l'existence de données initiales compatibles à tout ordre, on se contente de traiter le cas où W est nulle dans Ω_0^+.

6.4.1 Réduction à une condition aux limites homogène

On écrit $b := \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$ et on considère $q \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ tel que $q|_{\theta=0} = b_0$ et $\partial_\theta q|_{\theta=0} = b_1$. Un tel q existe : prendre par exemple

$$q(t,x,\theta) := (2b_0 + b_1)e^{-\theta} - (b_0 + b_1)e^{-2\theta}.$$

Notant $\Phi := W - q$, on a alors que W vérifie (49) si et seulement si $P_0^\perp \Phi = 0$, que W vérifie (51) si et seulement si $\mathbf{N}\begin{bmatrix} \Phi \\ \partial_\theta \Phi \end{bmatrix} = 0$ et que W vérifie (50) si et seulement si

$$(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\Phi = \mathbf{P}_0 f(t,x,p,\Phi + q) - (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})q \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}^+_\theta$$

Le second membre, dans l'égalité précédente, peut se mettre sous la forme $\mathbf{P}_0 \tilde{f}(t,x,\tilde{p},\Phi)$ où $\tilde{f}$, $\tilde{p}$ vérifient les mêmes hypothèses que f et p. On peut ainsi se ramener au cas où b est nul.

6.4.2 Réduction matricielle

Introduisons une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de $\mathbb{R}^N$, $(e_1(t,x),...,e_N(t,x))$ où les $e_i(t,x)$ sont des fonctions C^∞ telles que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant d_0}$ est une base de $\ker \mathring{A}_n$. Soit U la matrice $N\times N$ orthogonale dont les colonnes sont les $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$. On a ainsi que U est dans $C^\infty(\mathbb{R}^{1+n}, O(\mathbb{R}^N))$, où $O(\mathbb{R}^N)$ désigne le groupe des matrices $N\times N$ orthogonales. Considèrons les matrices, de taille $2N\times 2N$, $\mathbf{U} := \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}$, et T la matrice de symétrie :

$$T := \begin{bmatrix} Id_{d_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id_{d_0} & 0 \\ 0 & Id_{N-d_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id_{N-d_0} \end{bmatrix}.$$

Considèrons la nouvelle inconnue $\tilde{W}(t,x) := T\mathbf{U}^{-1}(t,x)W(t,x)$. On note

$$\tilde{W}_I := (\tilde{W}_1, ..., \tilde{W}_{2d_0}) \in \mathbb{R}^{2d_0} \quad \text{et} \quad \tilde{W}_{II} := (\tilde{W}_{2d_0+1}, ..., \tilde{W}_{2N}) \in \mathbb{R}^{2(N-d_0)}.$$

Lemme 6.1 *La condition de polarisation* (49) *s'écrit*

$$\tilde{W}_{II} = 0 \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+$$

tandis que la condition aux limites (51) *s'écrit*

$$\tilde{N} \begin{bmatrix} \tilde{W}_I \\ \partial_\theta \tilde{W}_I \end{bmatrix} = 0 \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \{0\}$$

avec

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} Id & -Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & Id \end{bmatrix}$$

où les matrices Id et 0 sont de taille $d_0 \times d_0$.

Preuve. En effet, écrivant

$$\begin{aligned} \check{W}_\pm := U^{-1}W_\pm =:^t (\check{W}_{\pm,1}, ..., \check{W}_{\pm,N}), \\ \check{W}_{\pm,I} = (\check{W}_{\pm,1}, ..., \check{W}_{\pm,d_0}) \in \mathbb{R}^{d_0}, \\ \check{W}_{\pm,II} = (\check{W}_{\pm,d_0+1}, ..., \check{W}_{\pm,N}) \in \mathbb{R}^{N-d_0}, \end{aligned}$$

la condition de polarisation (49) s'écrit :

$$\check{W}_{II}^+ = \check{W}_{II}^- = 0 \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+$$

et la condition aux limites (51) s'écrit :

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\check{W}\\ \partial_\theta \check{W}\end{bmatrix} = 0 \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \{0\}.$$

On remarque alors que

$$\tilde{W}_I = \begin{bmatrix}\check{W}_{+,I}\\ \check{W}_{-,I}\end{bmatrix}, \quad \check{W}_{II} = \begin{bmatrix}\check{W}_{+,II}\\ \check{W}_{-,II}\end{bmatrix}. \quad \square$$

Multipliant (50) à gauche par ${}^t(\mathbf{U}T)$, on obtient alors un système équivalent $2d_0 \times 2d_0$ de la forme

$$(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]})\tilde{W}_I = q(t,x,p,\tilde{W}_I).$$

L'opérateur $\mathbb{H}^{[I]}$ est un opérateur symétrique hyperbolique qui s'écrit :

$$\mathbb{H}^{[I]} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} C_j(t,x)\partial_j + C_{n+1}(t,x)\theta\partial_\theta.$$

Les matrices $C_j(t,x)$ sont symétriques de taille $2d_0 \times 2d_0$ extraites respectivement des matrices ${}^t(\mathbf{U}T)P_0A_jP_0(\mathbf{U}T)(t,x)$ (si $j \leqslant n$), ${}^t(\mathbf{U}T)K(\mathbf{U}T)(t,x)$ (si $j = n+1$). La matrice C_0 est définie positive. Omettant les tildes et indices I (sauf pour l'opérateur $\mathbb{H}^{[I]}$), on est donc ramené au problème

$$\begin{aligned}(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]})\tilde{W} = q(t,x,p,W) \quad &\text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+\\ \mathbf{N}\begin{bmatrix}W\\ \partial_\theta W\end{bmatrix}|_{\theta=0} = 0 \quad &\text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+\\ W = 0 \quad &\text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_0^+ \times \mathbb{R}_\theta^+\end{aligned}$$

où W est à valeurs dans $\mathbb{R}^{2d_0}$.

6.4.3 Estimation L^2 pour le problème linéaire

On introduit les normes à poids : $||W||_{L^2_\lambda(\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+)} = ||e^{-\lambda t}W||_{L^2(\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+)}$ et l'on note $< .,. >_{L^2_\lambda(\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+)}$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$ muni de la mesure $e^{-2\lambda t}dtdxd\theta$. On considère le problème linéaire :

(55) $$(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]})W = h \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+$$

(56) $$\mathbf{N}\begin{bmatrix}W\\ \partial_\theta W\end{bmatrix}|_{\theta=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+$$

(57) $$W = 0 \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_0^+ \times \mathbb{R}_\theta^+$$

où le second membre h vérifie $h|_{t\leqslant 0} = 0$.

Proposition 6.5 *Il existe un unique W dans $L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$ tel que $\partial_\theta W$ est dans $L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$ solution de $(55)-(56)-(57)$. De plus, il existe $c>0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant c$, on a*

$$(58)\ ||\partial_\theta W||^2_{L^2_\lambda(\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+)} + \lambda||W||^2_{L^2_\lambda(\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+)} \leqslant c| < h, W >_{L^2_\lambda(\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+)} |.$$

Preuve : on se contente ici de montrer l'inégalité d'énergie (58). L'existence et l'unicité d'une solution au problème $(55)-(56)-(57)$ s'en déduisent par les arguments de [2]. On multiplie (55) à gauche par ${}^tW$ et on intégre par parties en remarquant que :

- $-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]}$ est tangent à $\{x_n = 0\}$ $(P_0 \mathring{A}_n P_0 = 0)$,
- $\mathbb{H}^{[I]}$ est tangent à $\{\theta = 0\}$,
- $-\int_{\theta>0} {}^tW.\partial_\theta^2 W = \int_{\theta>0} {}^t\partial_\theta W.\partial_\theta W + ({}^tW.\partial_\theta W)|_{\theta=0}$.

Notant $W = \begin{bmatrix} W_+ \\ W_- \end{bmatrix}$, (56) se traduit par

$$W_+ = W_-, \quad \partial_\theta W_+ = -\partial_\theta W_- \quad \text{quand } \theta = 0.$$

Ainsi $({}^tW.\partial_\theta W)|_{\theta=0} = {}^t W_+.\partial_\theta W_+ + {}^t W_-.\partial_\theta W_- = 0.$ □

6.4.4 Estimation des dérivés pour le problème linéaire

Pour tout entier naturel m, on introduit les normes à poids :

$$||W||_{m,\lambda,T} := \sum_{|\alpha|\leqslant m} \lambda^{m-|\alpha|} ||\partial_0^{\alpha_0}...\partial_n^{\alpha_n}(\theta\partial_\theta)^{\alpha_{n+1}} W||_{L^2_\lambda(\Omega_T\times\mathbb{R}_\theta^+)},$$
$$|W|_{m,\lambda,T} := \sum_{|\alpha|\leqslant m} \lambda^{m-|\alpha|} ||\partial_0^{\alpha_0}...\partial_n^{\alpha_n}\partial_\theta^{\alpha_{n+1}} W||_{L^2_\lambda(\Omega_T\times\mathbb{R}_\theta^+)}$$

où $\alpha := (\alpha_0, ..., \alpha_{n+1})$ est dans $\mathbb{N}^{n+2}$.

Proposition 6.6 *Il existe $\lambda_m \geqslant 1$ tel que, pour tout $\lambda \geqslant \lambda_m$,*

$$|W|_{m,\lambda,T} + ||W||_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{\lambda_m}{\lambda}(|h|_{m,\lambda,T} + ||h||_{m,\lambda,T}).$$

Preuve : on commence par estimer les dérivées conormales au bord $\{\theta = 0\}$. Le point important est que les conditions aux limites (56) aient de bonnes propriétés de commutation avec les dérivées conormales : en effet, pour tout entier naturel n, $\partial_\theta(\theta\partial_\theta)^n$ est de la forme $\partial_\theta + \theta.\mathit{Opérateur} \quad \mathit{en} \quad \partial_\theta, \theta\partial_\theta$. On a donc que

$$\partial_\theta(\theta\partial_\theta)^n W_+ = -\partial_\theta(\theta\partial_\theta)^n W_- \quad \text{quand } \theta = 0.$$

Plus généralement, notant $Z_{n+1} := \theta\partial_\theta$ et pour $\alpha := (\alpha_0, ..., \alpha_{n+1})$, $Z^\alpha := Z_0^{\alpha_0} ... Z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+2}, |\alpha| \leqslant m$, que $Z^\alpha W$ est solution de

$$(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]})Z^\alpha W = \tilde{h} \quad \text{quand } (t, x, \theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \tag{59}$$

$$\mathbf{N} \begin{bmatrix} Z^\alpha W \\ \partial_\theta Z^\alpha W \end{bmatrix} |_{\theta=0} = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \tag{60}$$

$$Z^\alpha W = 0 \quad \text{quand } (t, x, \theta) \in \Omega_0^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \tag{61}$$

où $\tilde{h} := Z^\alpha h + [\mathbb{H}^{[1]}, Z^\alpha]W + [-\partial_\theta^2, Z^\alpha]W$.

Notons que l'un des intérêts de la réduction matricielle précédente était d'éliminer les problèmes de commutation des opérateurs de dérivation avec la condition de polarisation (49).

Le deuxième terme du membre de droite de (59) se majore par

$$cte\lambda^{-1}(||h||_{m,\lambda,T} + ||W||_{m,\lambda,T})||W||_{m,\lambda,T}.$$

Pour le troisième terme, puisque $[\partial_\theta^2, \partial_i] = 0$ si $i \in \{0, ..., n\}$ et $[\partial_\theta^2, \theta\partial_\theta] = 2\partial_\theta^2$, le commutateur $[\partial_\theta^2, Z^\alpha]$ s'écrit comme une somme de termes de la forme $\partial_\theta^2 Z^\beta W$ où $|\beta| \leqslant |\alpha| - 1$. En intégrant par parties en θ, on a

$$< \partial_\theta^2 Z^\beta W, Z^\alpha W >_{L^2_\lambda} = - < \partial_\theta Z^\beta W, \partial_\theta Z^\alpha W >_{L^2_\lambda} - {}^t(\partial_\theta Z^\beta W).(Z^\alpha W)|_{\theta=0}.$$

Tirant parti de (60), on obtient ${}^t(\partial_\theta Z^\beta W).(Z^\alpha W)|_{\theta=0} = 0$. Le troisième terme du membre de droite de (59) se majore donc par

$$cte\lambda^{-1}||\partial_\theta W||_{m-1,\lambda,T}||\partial_\theta W||_{m,\lambda,T} \leqslant cte\lambda^{-2}||\partial_\theta W||^2_{m,\lambda,T}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient donc pour λ assez grand

$$||\partial_\theta W||^2_{m,\lambda,T} + \lambda||W||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{c_m}{\lambda}(||h||_{m,\lambda,T} + ||W||_{m,\lambda,T})||W||_{m,\lambda,T}$$

et, quitte à augmenter c_m, pour $\lambda \geqslant c_m$,

$$\sqrt{\lambda}||\partial_\theta W||_{m,\lambda,T} + \lambda||W||_{m,\lambda,T} \leqslant c_m||h||_{m,\lambda,T}.$$

On estime ensuite les dérivées normales, remarquant que l'on peut réécrire l'équation : $\partial_\theta^2 W = -h + \mathbb{H}^{[I]} W$ $\square$

6.4.5 Conclusion

On procède ensuite comme dans [2], utilisant un schéma itératif et des inégalités de type Gagliardo-Nirenberg, pour résoudre le problème non linéaire. On montre également à l'aide d'estimations sur le linéarisé et du schéma itératif, la décroissance rapide de la solution. La condition d'explosion provient de ce que la non linéarité est contrôlée, dans le shéma itératif, à l'aide de la norme L^∞.

6.5 CLNC

L'étude des CLNC fait intervenir des équations de la forme

$$(-\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}} = \Phi \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \tag{62}$$

où $\Phi \in \mathcal{N}_z(T)$ et des conditions aux limites de la forme :

$$N_1\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}} = K \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \{0\} \tag{63}$$

où K est dans $H^\infty(\Omega_T^+)$. Il s'agit d'une EDO linéaire en z paramétrée par (t,x). Introduisons les matrices $2N \times 2N$:

$$Pol_c := \begin{bmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{bmatrix}. \tag{64}$$

On note $Pol_c^\perp := \mathbf{Id} - Pol_c$.

Proposition 6.7 1. *Les matrices Pol_c commutent avec $(-\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)$.*
2. *Si $\Phi = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_z(T)$ solution de (62) alors $Pol_c^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.*
3. *Si $Pol_c\Phi = 0$ alors (62) admet une et une seule solution $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_z(T)$ telle que $Pol_c\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.*
4. *Si $Pol_c^\perp\Phi = 0$ et si $Pol_c^\perp K = 0$ alors $(62) - (63)$ admet une et une seule solution $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_z(T)$ telle que $Pol_c^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.*

Remarquons que dans le cas du point 2, on peut dire que le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est polarisé selon Pol_c. Revenant au problème dans tout l'espace, cela signifie que $\mathcal{U}$ est polarisée selon P_- (resp P_+) pour $x_n > 0$ (resp $x_n > 0$) ie $(Id - P_-)\mathcal{U} = 0$ (resp $(Id - P_+)\mathcal{U} = 0$). L'esprit des points 3 et 4 est que pour la partie polarisée ie $Pol_c\mathcal{U}$, il est possible de prescrire une condition en $z = 0$, ce qui n'est pas possible pour $Pol_c^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.

Preuve. Notons $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ une base de $\mathbb{R}^N$ de vecteurs propres de $\mathring{\boldsymbol{A}}_n$ de valeurs propres associées $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$. On notera respectivement I_+, I_- et I_0 les ensembles des indices i pour lesquels la valeur propre correspondante λ_i vérifie $\lambda_i > 0$, $\lambda_i < 0$ et $\lambda_i = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ quelconque, on écrit $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$. On a donc $P_+x = \sum_{i\in I_+} x_i e_i$, $\mathring{A}_n x = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i e_i$ et $\mathring{A}_n P_+ x = \sum_{i\in I_+} \lambda_i x_i e_i = P_+\mathring{A}_n x$. Ainsi, les matrices $\mathring{A}_n$ et P_+ commutent. On procède de même avec P_- et P_0. Par suite, la matrice Pol_c commute avec l'opérateur $(-\partial_z^2 + \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_z)$.

Pour le point 2, si $\Phi = 0$ et la fonction $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est solution de (62) alors $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+ \\ \mathcal{U}_- \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_{\substack{+\\-}}(t,x,z) := \sum_{i=1}^N \alpha_i^{\substack{+\\-}}(t,x) e^{\substack{+\\-}\lambda_i(t,x)z} e_i(t,x),$$

où les fonctions $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ sont scalaires. Une telle fonction $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est dans $\mathcal{N}_z(T)$ si et seulement si

$$\alpha_i^{\overset{+}{-}} = 0 \quad \forall i \notin I_{\underset{+}{-}}$$

c'est-à-dire si et seulement si $Pol_c^{\pm}\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$. La condition de décroissance à l'infini permet de conclure.

Pour le point 3, on commence par résoudre le problème :

$$(65) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver} \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} \in \mathcal{N}_z(T) \quad \text{tel que} \\ (-\partial_z + \mathring{\boldsymbol{A}}_n)\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \Phi \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \\ Pol_c\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = 0 \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \end{array} \right.$$

où $\Phi \in \mathcal{N}_z(T)$ vérifie $Pol_c\Phi = 0$. On écrit $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix}$ avec

$$\Phi_\pm(t,x,z) = \sum_{i\notin I_\pm} \Phi_i^\pm(t,x,z)e_i(t,x)$$

où les fonctions $(\Phi_i^\pm)_i$ sont scalaires, régulières en (t,x,z), à décroissance rapide en z.
La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]}$ au problème (65) sous la forme

$$(66) \qquad \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+^{[1]} \\ \mathcal{U}_-^{[1]} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_\pm^{[1]} = \alpha_i^\pm(t,x,z)e^{\pm\lambda_i(t,x)z}e_i(t,x)$$

où les fonctions scalaires $\alpha_i^\pm$ vérifient les EDO en z, paramétrées par (t,x), $-e^{\pm\lambda_i(t,x)z}\partial_z\alpha_i^\pm(t,x,z) = \Phi_i^\pm(t,x,z)$. On utilise alors une version à paramètres du lemme suivant dans lequel on a choisi, par souci de simplicité, de ne faire figurer que la variable z :

Lemme 6.2 *Soit Φ une fonction scalaire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ et λ un réel positif. La fonction $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi}(z) := e^{\lambda z}\int_z^\infty \Phi(z')e^{-\lambda z'}dz'$ est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$.*

Preuve : on écarte d'emblée le cas $\lambda = 0$, qui est trivial. Définissons, pour tout entier naturel l, l'assertion de récurrence :

$$\Pi(l): \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad z^k\tilde{\Phi}^{(l)}(z) \in L^2(\mathbb{R}_z^+).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\tilde{\Phi}(z)|^2 \leqslant e^{2\lambda z}\int_z^\infty |\Phi(z')|^2dz'.\int_z^\infty e^{-2\lambda z'}dz' \leqslant \frac{1}{2\lambda}\int_z^\infty |\Phi(z')|^2dz'$$

Ainsi, pour tout entier naturel k,

$$\int_{z>0} z^{2k}|\tilde{\Phi}(z)|^2 dz \leqslant \frac{1}{2\lambda}\int_{z>0} z^{2k}\int_z^{\infty} |\Phi(z')|^2 dz' dz,$$
$$\int_{z>0} z^{2k}|\tilde{\Phi}(z)|^2 dz \leqslant \frac{1}{2\lambda}\int_{z>0}\int_z^{\infty} z'^{2k}|\Phi(z')|^2 dz' dz.$$

Comme $\int_{z'>0}\int_0^{z'} z'^{2k}|\tilde{\Phi}(z')|^2 dz dz' = \int_{z'>0} z'^{2k+1}|\tilde{\Phi}(z')|^2 dz' < \infty$ car $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, le principe de Fubini assure que $z^k\tilde{\Phi}(z)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. Ainsi l'assertion $\Pi(0)$ est vérifiée.

Supposons l'assertion $\Pi(l)$ vérifiée, alors on remarque que $\tilde{\Phi}' = \lambda\tilde{\Phi} - \Phi$. Dérivant l fois , on a $\tilde{\Phi}^{(l+1)} = \lambda\tilde{\Phi}^{(l)} - \Phi^{(l)}$. Par conséquent, la fonction $z^k\tilde{\Phi}^{(l)}(z)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, pour tout entier naturel k. Le principe de récurrence assure que l'assertion $\Pi(l)$ est vraie pour tout entier naturel l, ce qui achève de démontrer le lemme. □

Ainsi le problème (65) admet une et une seule solution $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]}$ de la forme (66) avec

$$\alpha_i^{\pm}(t,x,z) = \int_z^{\infty} \Phi_i^{\pm}(t,x,z')e^{\mp\lambda_i(t,x)z'}dz'.$$

Aussi l'unique solution $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ dans $\mathcal{N}_z(T)$ de (62) telle que $Pol_c\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$ est donnée par

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix}\mathcal{U}_+\\ \mathcal{U}_-\end{bmatrix}$$

avec $\mathcal{U}_{\pm}(t,x,z) = \sum_{i\notin I_{\mp}} \beta_i^{\pm}(t,x,z)e_i(t,x)$ où la fonction scalaire $\beta_i^{\pm}$ est la primitive (en z) de $\alpha_i^{\pm}e^{\pm\lambda_i z}$ qui s'annule en $z=\infty$.

Pour le point 4, la stratégie est similaire au point précédent : on commence par chercher un profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} \in \mathcal{N}_z(T)$ solution du problème :

$$\begin{cases} (-\partial_z + \mathring{\boldsymbol{A}}_n)\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \Phi \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \\ N_1\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = K \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \{0\} \\ Pol_c^{\perp}\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = 0 \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \end{cases}$$

par la méthode de variation de la constante. On écrit

$$\Phi = \begin{bmatrix}\Phi_+\\ \Phi_-\end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix}K_+\\ K_-\end{bmatrix}$$

avec

$$\Phi_\pm(t,x,z) = \sum_{i\in I_{\mp}} \Phi_i^\pm(t,x,z)e_i(t,x), \quad K_\pm(t,x) = \sum_{i\in I_{\mp}} K_i^\pm(t,x)e_i(t,x).$$

Les fonctions $(\Phi_i^\pm)_i$ et $(K_i^\pm)_i$ sont scalaires régulières en (t,x,z) et les $(\Phi_i^\pm)_i$ sont à décroissance rapide en z. On cherche le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]}$ sous la forme $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{U}}_+^{[1]}\\ \boldsymbol{\mathcal{U}}_-^{[1]}\end{bmatrix}$ où

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_\pm^{[1]}(t,x,z) = \sum_{i\in I_{\mp}} \alpha_\pm(t,x,z)e^{\pm\lambda_i(t,x)z}e_i(t,x)$$

avec

$$\begin{aligned} -e^{\pm\lambda_i(t,x)z}\partial_z\alpha_i^\pm(t,x,z) = \Phi_i^\pm(t,x,z) \quad &\text{quand } (t,x,z)\in\Omega_T^+\times\mathbb{R}_z^+ \\ \alpha_i^\pm = K_i^\pm \quad &\text{quand } (t,x,z)\in\Omega_T^+\times\{0\} \end{aligned}$$

On utilise le lemme suivant :

Lemme 6.3 *Soit Φ une fonction scalaire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^z)$ et λ un réel strictement n'egatif. La fonction $\tilde\Phi$ définie par $\tilde\Phi(z) := e^{\lambda z}\int_0^z \Phi(z')e^{-\lambda z'}dz'$ est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$.*

Preuve. Définissons, pour tout entier naturel l, l'assertion de récurrence :

$$\Pi(l): \quad \forall k\in\mathbb{N}, \quad z^k\tilde\Phi^{(l)}(z)\in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\tilde\Phi^{(l)}(z)|^2 \leqslant Ce^{2\lambda z}$ ainsi $\Pi(0)$ est vérifiée. Supposons $\Pi(l)$ et remarquons que $\tilde\Phi' = \lambda\tilde\Phi + \Phi'$. On déduit $\Pi(l+1)$ comme dans le lemme précédent $\square$

Aussi l'unique solution $\boldsymbol{\mathcal{U}}\in\mathcal{N}_z(T)$ de $(62)-(63)$ telle que $Pol_c^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$ est donnée par

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix}\mathcal{U}_+\\ \mathcal{U}_-\end{bmatrix}$$

où $\mathcal{U}_\pm(t,x,z) = \sum_{i\in I_{\mp}} \beta_i^\pm(t,x,z)e_i(t,x)$ où $\beta_i^\pm$ est la primitive (en z) de $\alpha_i^\pm e^{\pm\lambda_i z}$ qui s'annule en $z=+\infty$ avec

$$\alpha_i^\pm(t,x,z) = \int_0^z e^{\mp\lambda_i(t,x)z'}\Phi_i^\pm(z')dz' + K_i^\pm(t,x). \quad \square$$

Notons que l'on peut préciser la décroissance des profils de CLNC mises en jeu dans cet article. Pour une telle étude, dans un contexte voisin, on renvoie à [11].

6.6 Le tableau de la cascade

On considère alors, pour $j \geqslant -1$, les problèmes

$$(S^j(T)) : \quad \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{j-1} = \mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{j-1} = \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^j = \boldsymbol{\mathcal{F}}_a^j = 0 \\ \text{quand } (t, x, \theta, z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \times \mathbb{R}_z^+ \end{cases} ,$$

et on illustre notre statégie de résolution en cascade par le tableau suivant :

	(S^{-1})	(S^0)	(S^1)	...
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-2}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-2}$			
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}$		$\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-1}$; $\mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{-1}$		
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{0}$		$\mathbf{P}_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^0$; $\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^0$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^0$; $\mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^0$	
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{1}$			$\mathbf{P}_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^1$; $\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^1$	...

Chaque terme de la première colonne est la somme de la ligne correspondante. Lors de la résolution du problème (S^j), les profils inconnus sont $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j, \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$. Notons que ce tableau présente une différence essentielle avec celui de [11] : les profils $\boldsymbol{\mathcal{F}}_c$ sont ici décalés d'une colonne vers la gauche.

Lorsque les problèmes $(S^j(T))_{0 \leqslant j \leqslant N}$ sont vérifiés, les premiers termes non nuls de l'ansatz de résolution sont

$$\sqrt{\varepsilon}^N (\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^N + \mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^N).$$

On a ainsi un reste de la forme $\sqrt{\varepsilon}^{N+\frac{1}{2}} \mathbf{R}_\varepsilon$, avec $\mathbf{R}_\varepsilon \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T_1)$, pour tout entier naturel m.

Voyons comment résoudre les problèmes $(S^j(T))$-$(S_{cl}^j(T))$ pour $j \geqslant -1$. Les cas $j = -1$ et $j = 0$, particuliers, sont détaillés. Rappelons, pour le confort du lecteur, que le problème $(S_{cl}^{-1}(T))$ est constitué de l'équation (42), le problème $(S_{cl}^0(T))$ est constitué des equations (43), (44) et (45). Enfin, pour $j \geqslant 1$, le problème $(S_{cl}^j(T))$ est constitué des equations (46), (47) et (48).

6.6.1 $(S^{-1}(T))$ et $(S_{cl}^{-1}(T))$

Le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0$ doit satisfaire le problème

$$\begin{cases} \partial_z^2 \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}} \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 = 0 \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \\ \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0|_{z=0} = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 = 0$.

6.6.2 $(S^0(T))$ et $(S^0_{cl}(T))$

Définissons les problèmes

$$(67) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a = \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a) + \mathbf{f}(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases},$$

$$(68) \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{rcl} \mathbf{P}_0^{\perp}\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b & = & 0 \\ (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b & = & \Upsilon \end{array}\right\} \quad \text{pour } (t,x,\theta) \text{ dans } \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_\theta \\ \mathbf{N}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b \\ \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b \end{bmatrix}|_{\theta=0} = -\mathbf{N}\mathbf{P}_0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \end{cases},$$

où $\Upsilon := \mathbf{P}_0(\mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a + \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a))$ et

$$(69) \qquad \begin{cases} (-\partial_z^2 + \mathbf{\mathring{A}_n}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c = 0 \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_z \\ N_1\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c|_{z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \end{cases}$$

Résoudre $(S^0(T))$ et $(S^0_{cl}(T))$ revient à résoudre le problème limite (67) puis dans l'ordre que l'on veut les problèmes (68) et (69), ce que l'on note
(68)
(69) .
En effet, compte-tenu des conditions de polarisation $\mathbf{P}_0^{\perp}\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b = 0$ et $Pol_c^{\perp}\boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c = 0$ (cf proposition 6.7 2.), la condition aux limites

$$N_1(\partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b|_{\theta=0} + \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c|_{z=0}) = 0$$

est équivalente à

$$N_1\partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b|_{\theta=0} = N_1\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c|_{z=0} = 0.$$

On constate que (67) n'est autre que le problème hyperbolique constitué des équations (5) et (6). On prend $\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_a := \mathbf{u}^0$. L'unique solution du problème (69) est $\boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c = 0$.

Aux ordres supérieurs, les différents types de termes composant les profils sont couplés par les conditions aux limites. La résolution des problèmes $(S^j(T))$-$(S^j_{cl}(T))$, pour $j \geqslant 1$, s'en trouve compliquée.

6.6.3 $(S^j(T))$-$(S^j_{cl}(T))$; $j \geqslant 1$

Pour chaque $j \geqslant 1$, lors de la résolution $(S^j(T))$, on est confronté au problème suivant :

$$(70) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a &= \Phi^j_a \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \\ \mathbf{\mathring{A}_n}\partial_\theta \mathbf{P}_0^{\perp}\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b &= \Phi^j_{b,1} \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_\theta \\ (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b &= \Phi^j_{b,2} \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_\theta \\ (-\partial_z^2 + \mathbf{\mathring{A}}_n\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c &= \Phi^{j+1}_c \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_z \end{aligned}$$

où les membres de gauche valent :

$$\begin{aligned}
\Phi_a^j &:= -q_a^j + \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u}^0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j, \quad \Phi_c^{j+1} := -q_c^{j-1},\\
\Phi_{b,1}^j &:= -\mathbf{P}_0^\perp\,(\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j-1} + \mathring{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{n}}\theta\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j-1} - \partial_\theta^2\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j-1} + q_b^{j-1}),\\
\Phi_{b,2}^j &:= \mathbf{P}_0(-\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{P}_0^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j + \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u}^0+\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0).(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j+\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j) - \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u}^0).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j - q_b^j).
\end{aligned}$$

La fonction Φ_a^j est dans $H^\infty(\Omega_T^+)$, les fonctions $\Phi_{b,1}^j$ et $\Phi_{b,2}^j$ dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ et Φ_c^{j+1} dans $\mathcal{N}_z(T_0)$. Les termes Φ^j contiennent donc des termes d'ordre 0 en les profils des membres de gauche et des termes sources.

Définissons, pour $(t,x,z)\in\Omega_T\times\mathbb{R}_z^+$,

$$Pol_c^\perp\,(-\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1} = Pol_c^\perp\,\Phi_c^{j+1}. \tag{71}$$

Les équations (70) et (71) jouent un rôle important dans la résolution des problèmes $(S^j(T))$ et $(S_{cl}^j(T))$. En effet, on a dit que la difficulté provenait du couplage induit par les conditions aux limites. Or les équations (70) et (71) déterminent univoquement $\mathbf{P}_0^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ et $Pol_c^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$. Cela provient d'une part de ce que l'opérateur de dérivation ∂_θ réalise un automorphisme de $\mathcal{N}_\theta(T)$ et d'autre part des propriétés 1 et 3 de la proposition 6.7. Les traces $\mathbf{P}_0^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}$ et $Pol_c^\perp\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0}$ sont donc imposées par l'équation et ne peuvent pas être prescrites. Ces traces vont être compensées (dans la condition (46)) par la partie régulière du profil. Les relations (47) et (48) sont, quant à elles, assurées par les profils de couche limite.

Pour chaque $j\geqslant 1$, lors de la résolution $(S_{cl}^j(T))$, on est confronté au problème suivant :

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\mathcal{U}}^j = 0 \quad \text{quand } (t,x)\in\Gamma_T$$

$$\left.\begin{aligned}
&N_0\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0} = -N_0\mathbf{P}_0(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j|_{z=0})\\
&N_1\mathbf{P}_0\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j = -N_1\mathbf{P}_0(\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0})\\
&N_1\mathbf{P}_0^\perp\,\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0} = -N_1\mathbf{P}_0^\perp\,(\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{z=0})
\end{aligned}\right\}\quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T^+$$

Pour chaque $j\geqslant 1$, définissons les problèmes

$$\left\{\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j = \Phi_a^j \quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T^+\\
&M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j = -M(\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0} + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j|_{z=0}) \quad \text{quand } (t,x)\in\Gamma_T
\end{aligned}\right. \tag{72}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j \quad &= \quad \Phi_{b,2}^j \quad \text{quand } (t,x,\theta)\in\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+,\\
\mathbf{N}\mathbf{P}_0\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j\\ \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j\end{bmatrix}|_{\theta=0} \quad &= \quad -\mathbf{N}\mathbf{P}_0\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j|_{z=0}\\ \partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0}\end{bmatrix}\\
&\qquad\qquad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T^+
\end{aligned}\right. \tag{73}$$

et

$$
(74)\left\{\begin{array}{ll}
Pol_c(-\partial_z^2+\mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1} & = Pol_c\Phi_c^{j+1} \\
 & \text{quand } (t,x,z)\in\Omega_T^+\times\mathbb{R}_z^+ \qquad , \\
N_1\mathbf{P}_0^\perp\,\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0} & = -N_1\mathbf{P}_0^\perp\,(\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1}+\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}) \\
 & \text{quand } (t,x)\in\Omega_T^+ \qquad .
\end{array}\right.
$$

La condition aux limites précédente peut se réécrire sous la forme (63) avec

$$
K=-\begin{bmatrix}0 & P_-\\ P_+ & 0\end{bmatrix}\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0}-\begin{bmatrix}P_- & P_-\\ P_+ & P_+\end{bmatrix}(\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1}+\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}).
$$

En effet, par application des projections $\mathbf{P}_-:=\begin{bmatrix}P_- & 0\\ 0 & P_-\end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_+:=\begin{bmatrix}P_+ & 0\\ 0 & P_+\end{bmatrix}$ et $\mathbf{P}_0$, la condition aux limites

$$
\begin{array}{rcl}
N_1\mathbf{P}_0^\perp\,\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0} & = & -N_1\mathbf{P}_0^\perp\,(\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1}+\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}) \\
 & & \text{quand } (t,x)\in\Omega_T^+
\end{array}
$$

est équivalent à

$$
\left\{\begin{array}{l}
P_-^\natural\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0}=P_-^\natural(\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1}+\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0})\\
P_+^\natural\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0}=P_+^\natural(\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1}+\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0})
\end{array}\right\}\quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T^+,
$$

où $P_\pm^\natural:=\begin{bmatrix}P_\pm & P_\pm\end{bmatrix}$. Notons que l'on a $Pol_c^\perp K=0$.

Résoudre $(S^j(T))$ et $(S_{cl}^j(T))$ revient à résoudre successivement $\begin{array}{c}(70)\\(71)\end{array}$ puis (72) et enfin $\begin{array}{c}(73)\\(74)\end{array}$.

Remarquons notamment que la résolution de (72) n'exige la connaissance que d'une partie de $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$, à savoir $M\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}$ et cette quantité est déterminée par (70). Les problèmes (73) et (74) sont bien découplés puisque le problème (73) ne dépend de $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$ que par l'intermédiaire de $\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$ qui est déterminé par (71) et le problème (74) ne dépend de $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ que par l'intermédiaire de $\mathbf{P}_0^\perp\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ qui est déterminé par (70). Dans notre analyse, le couplage entre CLC et CLNC se fait donc par l'intermédiaire de la partie régulière du profil.

6.7 Conclusion

Les théorèmes 3.1 et 6.1, les propositions 3.1, 6.3 et 6.7 assurent l'existence d'un temps T_1 et de solutions aux problèmes $(S^j(T_1))$-$(S_{cl}^j(T_1))$ pour $j\geqslant 0$. Le temps T_1 ne dépend que de $\boldsymbol{\mathcal{U}}^0$ car seuls $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0$ vérifient des problèmes non linéaires. L'erreur commise est contrôlée par la proposition 6.1 $\square$

7 Preuve du point 3 du théorème 2.1

Définissons l'assertion de récurrence :

$$\Pi(n):\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_a^{2j+1} & = & 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}], \\ \mathcal{U}_b^j & = & 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n, \\ \mathcal{U}_c^j & = & 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n+2, \\ \mathcal{U}_a^{2j} & & \text{est } C^{r-2j} \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}]. \end{array}\right.$$

Montrons l'assertion $\Pi(0)$: le fait que $\mathcal{U}_c^0 = \mathcal{U}_c^1 = 0$ est acquis. Tenant compte de la continuité de u^0, le problème (73) se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 = 0 \\ (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 = \Upsilon \end{array}\right\} \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \\ \mathbf{N}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 \\ \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 \end{bmatrix}|_{\theta=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{array}\right.$$

Rappelons que $\Upsilon = \mathbf{P}_0(\mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0))$. Ainsi, on peut prendre $\mathcal{U}_b^0 = 0$. On a alors $\Phi_{b,1}^1 = 0$. Ainsi, par (70), on obtient $\mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^1 = 0$ et le problème (72) pour $j = 1$ se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 = \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u^0}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{array}\right.$$

On peut ainsi prendre $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 = 0$. Comme par la proposition 2.1, la fonction $\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{u^0}$ est de classe C^{r+1} et que $\Phi_c^2 = -q_c^0 = 0$ car $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 = 0$, le problème (74) pour $j = 1$ se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} (-\partial_z^2 + \mathbf{\mathring{A}_n}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 = 0 \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \\ N_1 \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2|_{z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{array}\right.$$

L'unique solution de ce problème est $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 = 0$. L'assertion $\Pi(0)$ est montrée. Si $r = 0$, c'est fini. Supposons maintenant que $r \neq 0$ et procèdons par récurrence finie. Supposons vérifiées les assertions $\Pi(k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant j$ où $j \leqslant r-1$ et montrons $\Pi(j+1)$. Par la proposition 6.2, on a $\Phi_{b,1}^{j+1} = 0$ d'où par (70), que $\mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = 0$. Distinguons deux cas :

• *si j est pair*, on a, par hypothèse, d'une part que $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = 0$ et d'autre part que $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j$ est C^{r-j}. Comme $r - j \geqslant 1$, cela implique que

$$N_1 \partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T$$

avec l'hypothèse de récurrence et la proposition 6.2, on a $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} = 0$ et $q_b^{j+1} = 0$. Ainsi le problème (73) avec $j+1$ en lieu et place de j se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = \mathbf{P}_0\mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u^0}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \mathbf{NP}_0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} \\ \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} \end{bmatrix}|_{\theta=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{array}\right.$$

On peut ainsi prendre $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = 0$. Par la proposition 6.2, il vient $\Phi_{b,1}^{j+2} = 0$, et donc, par (70), $\mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+2} = 0$. Comme par la proposition 6.2, on a $\Phi_c^{j+3} = 0$, (74) avec $j+2$ en lieu et place de j se réécrit :

$$\begin{cases} (-\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3} = 0 \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \\ N_1 \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3}|_{z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

d'où $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3} = 0$. L'assertion $\Pi(j+1)$ est dans ce cas démontrée.

• *si j est impair*, on a, par hypothèse, $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j-1}$ est $C^{r-(j-1)}$. Il s'en suit que q_a^{j+1} est $C^{r-(j-1)-2}$. Le problème (72) avec $j+1$ en lieu et place de j s'écrivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u^0}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} + q_a^{j+1} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases}$$

on a, par la proposition 2.1, que $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1}$ est $C^{r-(j-1)-2}$. Comme $r-(j-1)-2 = r-j-1 \geqslant 0$, on a

$$N_0 \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T$$

avec l'hypothèse de récurrence et la proposition 6.2, on a $q_b^{j+1} = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} = 0$. Ainsi (73) avec $j+1$ en lieu et place de j prend la même forme que dans le cas où j est pair. On en déduit, de même, que l'on peut prendre $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = 0$, puis que $\mathbf{P}_0^\perp \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+2} = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3} = 0$. Par la proposition 6.2, on obtient $q_a^{j+2} = 0$, et donc (72) avec $j+2$ en lieu et place de j s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} = \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u^0}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases}$$

On prend $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} = 0$ et l'hérédité de l'assertion $\Pi(j)$ est prouvée. □

A Preuve du théorème 3.1 et de la proposition 2.1

On introduit des espaces de régularité Sobolev anisotrope pour lesquels une dérivée normale vaut deux dérivées conormales.

Définition A.1 *Soit*
$H^{0,m}(\Omega_T^+) := \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega_T^+)/ \quad \forall l \leqslant k/ \quad Z^l\mathbf{u} \in L^2(\Omega_T^+)\}$.
$E^{m,T} := \{\mathbf{u} \in H^{0,m}(\Omega_T^+)/\partial_n^k \mathbf{u} \in H^{0,m-2k}(\Omega_T^+) \quad \forall 0 \leqslant 2k \leqslant m\}$ *muni de la famille de normes à poids :*

$$|\mathbf{u}|^E_{m,\lambda,T} := \sum_{0 \leqslant k+2l \leqslant m} \lambda^{m-k-2l} ||e^{-\lambda t} Z^k \partial_n^l \mathbf{u}||_{L^2(\Omega_T^+)}$$

où λ est un réel plus grand que 1.

On a le résultat suivant qui prouve en particulier le théorème 3.1

Théorème A.1 *Si* $\mathbf{f}$ *est dans* $E^{m,\infty}$ *alors il existe* T_0 *strictement positif et une et une seule* $\mathbf{u} \in E^{m,T_0}$ *solution de*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ \underline{M}(t,y)\mathbf{u} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{quand } t = 0 \end{cases}$$

Si T *est pris maximal et si* T *est fini, alors* $\lim_{t \to T^*} ||\mathbf{u}||_{L^\infty(\Omega_t)} = +\infty$. *Dans le cas linéaire , on peut prendre* $T = \infty$.

La preuve repose de manière essentielle sur une estimation pour le problème linéaire :

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0} \tag{75}$$

$$M\mathbf{u} = 0 \quad \text{quand} \quad (t,x) \in \Gamma_{T_0} \tag{76}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_0 \tag{77}$$

Compte-tenu de l'hypothèse 1.1, on a l'existence de $O(t,y)$ matrices $N \times N$ inversibles C^∞ de leurs arguments telles que ${}^tO\mathring{A}_nO = \mathfrak{D}$ où $\mathfrak{D}$ est la matrice diagonale par blocs $\mathfrak{D} := diag(Id_{d_+}, -Id_{d_-}, 0_{d_0})$. Définissons les matrices diagonales par blocs $\boldsymbol{O} := diag(O,O)$ et $\boldsymbol{\mathfrak{D}} := diag(\mathfrak{D}, -\mathfrak{D})$. Introduisons la matrice de permutations par blocs :

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} Id_{d_+} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{d_-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Id_{d_0} & 0 \\ 0 & 0 & Id_{d_+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id_{d_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id_{d_0} \end{bmatrix}.$$

Remarquons que

$${}^t\mathbf{Q}\boldsymbol{\mathfrak{D}}\mathbf{Q} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}$$

où $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ est la matrice diagonale $\boldsymbol{\mathfrak{C}} := diag(Id_{d_+}, -Id_{d_-}, -Id_{d_+}, -Id_{d_-}, 0_{2d_0})$. Effectuant le changement de variables consistant à remplacer u par $(\mathbf{OQ})^{-1}u$ et multipliant à gauche par ${}^t(\mathbf{OQ})$, on se ramène au cas où

$$\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}, \quad M := \begin{bmatrix} Id_{N-d_0} & Id_{N-d_0} & 0_{2d_0} \end{bmatrix}.$$

La preuve du théorème 3.1 ne nécessite nullement de prendre en considération la symétrie du problème. Aussi, nous ne ferons que la distinction entre les composantes qui sont caractéristiques et celles qui ne le sont pas. On note $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ où $\mathbf{v}$ (resp $\mathbf{w}$) est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2(N-d_0)}$ (resp $\mathbb{R}^{2d_0}$).

Théorème A.2 *On a les estimations*

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_m \geqslant 1/ \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_m, \quad |\mathbf{u}|^E_{m,\lambda,T_0} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_m} |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}.$$

Preuve : il s'agit d'estimer pour $2k + |l| \leqslant m$ le terme

$$\lambda^{m-2k-l} |\partial_n^k Z^l \mathbf{u}|^E_{0,\lambda,T_0}.$$

Estimation L^2
C'est un cas particulier de [9].

$k = 0$
$Z^l \mathbf{u}$ vérifie (75)- (76)- (77) avec $\overline{\mathbf{f}} := Z^l \mathbf{f} + [\mathcal{H}, Z^l]\mathbf{u}$ en lieu et place de $\mathbf{f}$.

L'estimation de ce dernier commutateur assure que $\overline{\mathbf{f}}$ est dans L^2 d'où par l'estimation L^2 que

$$\lambda^{m-2k-l} |Z^l \mathbf{u}|^E_{0,\lambda,T_0} \leqslant \frac{C}{\lambda} |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}.$$

$k \neq 0$
On estime séparément les dérivées de $\mathbf{v}$ et celles de $\mathbf{w}$. On écrit

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat + \mathring{\mathbf{A}}_n \partial_n, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^j(t,x) Z_j + \mathbf{B}(t,x)$$

et si $\mathbf{D}$ est une matrice $2N \times 2N$, on écrira $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{[1]} & \mathbf{D}^{[2]} \\ \mathbf{D}^{[3]} & \mathbf{D}^{[4]} \end{bmatrix}$ où $\mathbf{D}^{[4]}$ est de taille $2d_0 \times 2d_0$. En écrivant les matrices par blocs, (75) se réécrit :

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{j,[1]} Z_j \mathbf{v} + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{j,[2]} Z_j \mathbf{w} + \mathbf{B}^{[1]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[2]}\mathbf{w} + \mathfrak{C}^{[1]} \partial_n \mathbf{v} = \mathbf{f}^{[1]}$$
$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{j,[3]} Z_j \mathbf{v} + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}^{j,[4]} Z_j \mathbf{w} + \mathbf{B}^{[3]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[4]}\mathbf{w} = \mathbf{f}^{[2]}$$

ce que l'on abrége en

$$\mathbf{A}^{[1]} Z\mathbf{v} + \mathbf{A}^{[2]} Z\mathbf{w} + \mathbf{B}^{[1]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[2]}\mathbf{w} + \mathfrak{C}^{[1]} \partial_n \mathbf{v} = \mathbf{f}^{[1]} \tag{78}$$
$$\mathbf{A}^{[3]} Z\mathbf{v} + \mathbf{A}^{[4]} Z\mathbf{w} + \mathbf{B}^{[3]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[4]}\mathbf{w} = \mathbf{f}^{[2]} \tag{79}$$

où $\mathfrak{C}^{[1]} = diag(Id_{d_+}, -Id_{d_-}, -Id_{d_+}, Id_{d_-})$.

$\underline{\mathbf{v}}$: On a $|\partial_n \mathbf{v}|^E_{m-2,\lambda,T_0} \leqslant \frac{1}{\lambda}|\partial_n \mathbf{v}|^E_{m-1,\lambda,T_0}$. De plus, $|\partial_n \mathbf{v}|^E_{m-1,\lambda,T_0}$ peut être estimé grâce à (78).

$\underline{\mathbf{w}}$: Notons $\boldsymbol{\mathcal{X}} := \mathbf{A}^{[4]} Z + \mathbf{B}^{[4]}$. $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ est un opérateur symétrique hyperbolique linéaire agissant sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_0}$. Le bord $\{x_n = 0\}$ est totalement caractéristique pour l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. Alors (79) se réécrit

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w} = \mathbf{f}^{[2]} - \mathbf{A}^{[3]} Z\mathbf{v} - \mathbf{B}^{[3]}\mathbf{v}.$$

Ainsi,

$$|\partial_n \boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w}|^E_{m-2,\lambda,T_0} \leqslant C(|\mathbf{u}|^E_{m,\lambda,T_0} + |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}). \tag{80}$$

Ensuite, on a que $\boldsymbol{\mathcal{X}}\partial_n^k Z^l \mathbf{w}$ vérifie $\boldsymbol{\mathcal{X}}\partial_n^k Z^l \mathbf{w} = \bar{\mathbf{f}}$ où $\bar{\mathbf{f}} := \partial_n^k Z^l \boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w} + [\boldsymbol{\mathcal{X}}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}$. Ecrivant $k = k' + 1$, on a

$$\bar{\mathbf{f}} := (\partial_n)^{k'} Z^l (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w}) + [\boldsymbol{\mathcal{X}}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}$$

Le premier terme est contrôlé par (80) ($2k' + l \leqslant m - 2$). Pour le second, on écrit

$$[\boldsymbol{\mathcal{X}}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w} = [\mathbf{A}^{[4]} Z, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w} + [\mathbf{B}^{[4]}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}.$$

Voyons comment contrôler le premier terme qui est le "pire" (il contient une dérivée supplémentaire). $[\mathbf{A}^{[4]} Z, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}$ est une somme de terme de types

$$((\partial_n)^{k_1} Z^{l_1} \mathbf{A}^{[4]})((\partial_n)^{k_2} Z^{l_2} Z)\mathbf{w}$$

avec $k_1 + k_2 = k$, $l_1 + l_2 = l$ et $0 < 2k_1 + |l_1| < m$. L'estimation L^2 appliquée à $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ donne alors l'existence de $\lambda_m \geqslant 1$ tel que

$$\forall \lambda \geqslant \lambda_m \quad |(\partial_n)^k Z^l \mathbf{w}|_2 \leqslant \frac{C}{\lambda}(|\mathbf{u}|^E_{m,\lambda,T_0} + |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}). \quad \square$$

Pour montrer la proposition 2.1, on prend en compte la symétrie. On renvoie à [10] pour la preuve de la continuité de u. Suivant les effets de la permutation $\mathbf{Q}$, on remarque que les $(\mathbf{A}^{[\mathbf{i}]})_{1 \leqslant i \leqslant 4}$, les $(\mathbf{B}^{[\mathbf{i}]})_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{C}}^{[1]}$ sont diagonaux par blocs de la forme

$$\mathbf{A}^{[\mathbf{i}]} = \begin{bmatrix} A^{[i]} & 0 \\ 0 & A^{[i]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{[\mathbf{i}]} = \begin{bmatrix} B^{[i]} & 0 \\ 0 & B^{[i]} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathfrak{C}}^{[1]} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}^{[1]} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{C}^{[1]} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ peut aussi s'écrire $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & 0 \\ 0 & \mathcal{X} \end{bmatrix}$. Les équations (78) et (79) se découplent ainsi en quatre équations :

$$A^{[1]} Z v_\pm + A^{[2]} Z w_\pm + B^{[1]} v_\pm + B^{[2]} w_\pm \pm \mathfrak{C}^{[1]} \partial_n v_\pm = f^{[1]}_\pm \tag{81}$$

$$\mathcal{X} w_\pm = f^{[2]}_\pm - A^{[3]} Z v_\pm - B^{[3]} v_\pm \tag{82}$$

où $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_+ \\ v_- \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_+ \\ w_- \end{bmatrix}$. Dans le cas semilinéaire, il convient de remplacer, pour $i = 1$ ou 2, $f_\pm^{[i]}(t,x)$ par $f_\pm^{[i]}(t,x) + F_\pm^{[i]}(t,x,\mathbf{u})$. On soustrait alors les deux égalités données par (81), ainsi que celles données par (82), ce qui donne respectivement

$$A^{[1]}Z[v] + A^{[2]}Z[w] + B^{[1]}[v] + B^{[2]}[w] + \mathfrak{C}^{[1]}(\partial_n v_+ + \partial_n v_-) = [f^{[1]}] + [F^{[1]}]$$
$$\text{et} \quad \mathcal{X}[v] = [f^{[2]}] + [F^{[2]}] - A^{[3]}Z[v] - B^{[3]}[v],$$

où, pour $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix}$, $[u]$ désigne $[u] = u_+ - u_-$. La propagation de la régularité de u et la seconde assertion de la proposition 2.1 se montre alors par récurrence en notant que $\mathfrak{C}^{[1]}$ est inversible. $\square$

Références

[1] Olivier Guès. Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(5) :595–645, 1990.

[2] Olivier Guès. Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(4) :973–1006, 1995.

[3] Tosio Kato. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$. *J. Functional Analysis*, 9 :296–305, 1972.

[4] Sergiu Klainerman and Andrew Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(4) :481–524, 1981.

[5] Heinz-Otto Kreiss and Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, volume 136 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[6] G. Métivier. Ondes soniques. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 70(2) :197–268, 1991.

[7] Guy Métivier. The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data. *Duke Math. J.*, 53(4) :983–1011, 1986.

[8] Guy Métivier. Problèmes de Cauchy et ondes non linéaires. In *Journées "Équations aux dérivées partielles" (Saint Jean de Monts, 1986)*, pages No. I, 29. École Polytech., Palaiseau, 1986.

[9] Jeffrey Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1) :167–187, 1985.

[10] Denis Serre. *Systèmes de lois de conservation. I.* Fondations. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].

[11] Franck Sueur. Couches limites semilinéaires. Preprint.

[12] Franck Sueur. Couches limites : un problème inverse. Preprint.